

فهرست

فصل اول: تابع

- | | | | |
|---|-----|---|----|
| درس پنجم: معادله خطوط مماس و مشتق پذیری در بازه | ۲۱۷ | درس اول: توابع چندجمله‌ای - توابع صعودی و نزولی | ۸ |
| درس ششم: هوپیتال | ۲۲۱ | درس دوم: ترکیب توابع | ۱۲ |
| درس هفتم: آهنگ تغییر | ۲۳۳ | درس سوم: انتقال توابع | ۲۰ |
| مسائل تشریحی | ۲۳۹ | درس چهارم: تابع وارون | ۲۹ |
| پرسش‌های چندگزینه‌ای | ۲۳۴ | مسائل تشریحی | ۳۹ |
| پاسخ‌نامه تشریحی | ۲۴۷ | پرسش‌های چندگزینه‌ای | ۴۲ |
| | | پاسخ‌نامه تشریحی | ۵۵ |

فصل پنجم: کاربرد مشتق

- | | |
|---|-----|
| درس اول: یکنوایی تابع و ارتباط آن با مشتق | ۲۷۰ |
| درس دوم: نقاط بحرانی | ۲۷۲ |
| درس سوم: اکسترم‌های نسبی و آزمون مشتق اول | ۲۷۹ |
| درس چهارم: اکسترم‌های مطلق | ۲۸۷ |
| درس پنجم: بهینه‌سازی | ۲۹۲ |
| مسائل تشریحی | ۲۹۷ |
| پرسش‌های چندگزینه‌ای | ۳۰۰ |
| پاسخ‌نامه تشریحی | ۳۰۹ |

فصل ششم: هندسه

- | | |
|--|-----|
| درس اول: تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع مخروطی | ۳۲۸ |
| درس دوم: بیضی | ۳۳۸ |
| درس سوم: دایره | ۳۳۳ |
| مسائل تشریحی | ۳۵۵ |
| پرسش‌های چندگزینه‌ای | ۳۵۷ |
| پاسخ‌نامه تشریحی | ۳۶۵ |

فصل هفتم: احتمال

- | | |
|--------------------------|-----|
| درس اول: قانون احتمال کل | ۳۷۹ |
| مسائل تشریحی | ۳۸۵ |
| پرسش‌های چندگزینه‌ای | ۳۸۵ |
| پاسخ‌نامه تشریحی | ۳۸۸ |

فصل دوم: مثلثات

- | | |
|------------------------------|-----|
| درس اول: تناوب | ۸۰ |
| درس دوم: تابع تانژانت | ۸۹ |
| درس سوم: نسبت‌های مثلثاتی ۲a | ۹۷ |
| درس چهارم: معادلات مثلثاتی | ۱۰۳ |
| مسائل تشریحی | ۱۱۳ |
| پرسش‌های چندگزینه‌ای | ۱۱۵ |
| پاسخ‌نامه تشریحی | ۱۲۴ |

فصل سوم: حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت

- | | |
|-------------------------|-----|
| درس اول: حد توابع کسری | ۱۴۲ |
| درس دوم: حدهای نامتناهی | ۱۵۰ |
| درس سوم: حد در بی‌نهایت | ۱۵۸ |
| مسائل تشریحی | ۱۶۷ |
| پرسش‌های چندگزینه‌ای | ۱۷۰ |
| پاسخ‌نامه تشریحی | ۱۷۷ |

فصل چهارم: مشتق

- | | |
|--|-----|
| درس اول: آشنایی با مفهوم مشتق | ۱۸۹ |
| درس دوم: مشتق‌پذیری و پیوستگی | ۱۹۴ |
| درس سوم: تابع مشتق | ۲۰۲ |
| درس چهارم: مشتق توابع مرکب و مشتق مراتب بالاتر | ۲۱۲ |

آموزش مفهومی

درس اول: تناوب

تابع متناوب

در زندگی روزمره بسیار به پدیده‌هایی برخورد می‌کنیم که با نظم معین دقیقاً تکرار می‌شوند. شاید یکی از ساده‌ترین آن‌ها پدیده‌های روز و شب یا فصل‌های سال باشد.

مثلاً اگر امشب شب یلدا باشد، پس از گذشت ۳۶۵ شب دیگر مجدداً شب یلدا خواهد بود و همین‌طور ۲×۳۶۵، ۳×۳۶۵ و ... شب بعد، شب یلدا خواهیم داشت (البته با در نظر نگرفتن سال‌های کبیسه). پس می‌توان گفت با دوره تناوبی به اندازه ۳۶۵ شب یا مضرب صحیحی از آن، شب یلدا تکرار می‌شود که در این صورت ۳۶۵ را دوره تناوب اصلی آن در نظر می‌گیریم.

تعریف تابع f را متناوب گوئیم، هرگاه عددی مانند T وجود داشته باشد به طوری که برای هر x از دامنه f : $f(x+T) = f(x)$ عدد T را دوره تناوب تابع f و کوچک‌ترین مقدار مثبت T را در صورت وجود، دوره تناوب اصلی تابع f می‌نامند. مثلاً دوره تناوب تابع مقابل برابر $T=2$ است؛ چون ۲ واحد ۲ واحد تابع تکرار می‌شود. اگر بخواهیم علمی‌تر صحبت کنیم، $f(x+2) = f(x)$ است؛ یعنی هر نقطه روی تابع را که دوست دارید انتخاب کنید. اگر ۲ واحد جلو بروید، دوباره روی خود تابع می‌افتید.



مثال نشان دهید اگر $T_1 = 2$ دوره تناوب تابع $f(x)$ باشد، $T_2 = 4$ هم یک دوره تناوب آن است.

حل $T_1 = 2$ دوره تناوب f است؛ یعنی $f(x+2) = f(x)$ می‌باشد. برای این که ثابت کنیم $T_2 = 4$ هم دوره تناوب f است، باید به این نتیجه

برسیم که $f(x+4) = f(x)$ می‌باشد. $f(x+4) = f((x+2)+2) = f(x+2) = f(x)$

پس تابع f متناوب به دوره تناوب ۴ هم هست. البته از اول هم واضح بود که این اتفاق می‌افتد. وقتی f ۲ واحد ۲ واحد تکرار می‌شود، پس ۴ واحد ۴ واحد هم تکرار می‌شود!

حالا می‌توانیم نکته زیر را نتیجه بگیریم.

نکته اگر T_1 دوره تناوب یک تابع متناوب باشد، kT_1 هم حتماً یک دوره تناوب آن خواهد بود. ($k \in \mathbb{Z}$)

مثال در تابع $f(x) = \sin x$ ثابت کنید 2π دوره تناوب آن است.

حل باید ثابت کنیم $f(x+2\pi) = f(x)$ است:

یعنی $f(x) = \sin x$ تابعی متناوب با دوره تناوب 2π است.

تست اگر در تابع $y = f(x)$ با دامنه $\mathbb{R}$ به ازای هر x رابطه $f(x-1) = f(x+2)$ برقرار باشد، دوره تناوب آن لزوماً کدام است؟

(۴) لزوماً متناوب نیست.

(۳) $T = 3$

(۲) $T = 2$

(۱) $T = 1$

در رابطه $f(x-1) = f(x+2)$ به جای x مقدار $x_1 + 1$ را می‌گذاریم:

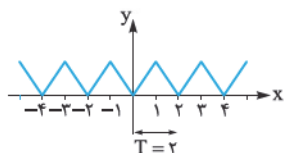
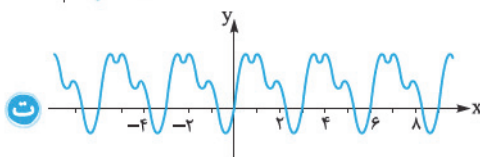
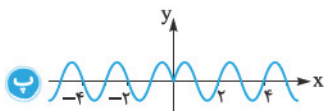
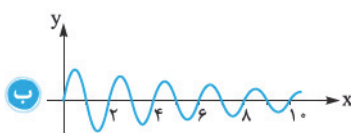
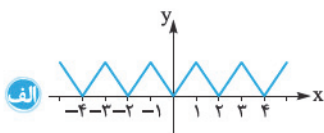
پاسخ گزینه ۳

$$f(x-1) = f(x+2) \xrightarrow{x=x_1+1} f(x_1+1-1) = f(x_1+1+2) \Rightarrow f(x_1) = f(x_1+3)$$

رابطه اخیر به ما می‌گوید $T = 3$ است. البته از همان اول هم مشخص بود؛ چون رابطه داده‌شده می‌گفت که مقدار تابع یک واحد قبل از x با دو واحد بعد از x برابر است. پس تابع ۳ واحد ۳ واحد تکرار می‌شود.

مثال

مشخص کنید کدام یک از توابع زیر متناوب است و در صورت امکان دوره تناوب آن‌ها را مشخص کنید.



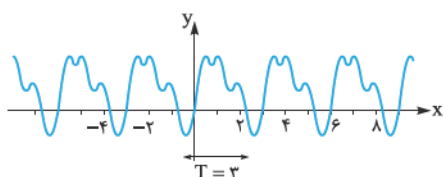
حل الف تابع متناوب است و دوره تناوب آن هم ۲ می‌باشد.

ب تابع متناوب نیست.

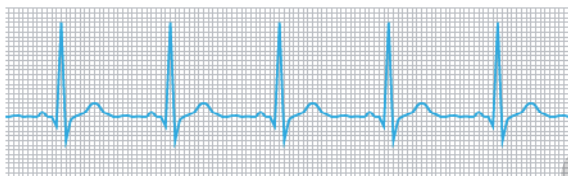
پ بعد از $x=0$ و قبل از $x=0$ ، تابع متناوب است، ولی $x=0$ کار ما را خراب کرده و روال نمودار را به هم ریخته است؛ پس تابع متناوب نیست. *پر عاشقان*

علم و دانش عارضه، نموداری که می‌بینید، مربوط به تابع $y = \sin(|\pi x|)$ است.

ت با چشمان غیر مسلح هم می‌توان فهمید که تابع متناوب است و دوره تناوب آن هم $T=3$ است.



راستی، ضربان قلب در افراد سالم هم متناوب است. در شکل رویه‌رو، نوار قلب یک فرد ناشناس را می‌بینید که برای درک بهتر، آن را آورده‌ایم:



یک دوره تناوب از آن هم این شکلی است:

مثال

کدام یک از توابع زیر، متناوب هستند؟ در صورت امکان دوره تناوب آن‌ها را پیدا کنید.

الف $y = |\sin x|$

ب $y = [x]$

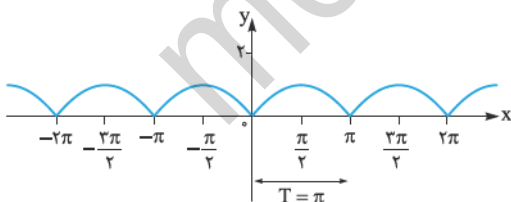
پ $y = 2^{\cos x}$

ت $y = x - [x]$

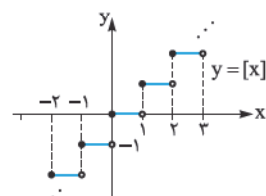
ث $y = \cos(\sin x)$

حل الف با اقتدار نمودار $y = |\sin x|$ را رسم می‌کنیم. نمودار به تنهایی

گویای همه چیز هست.



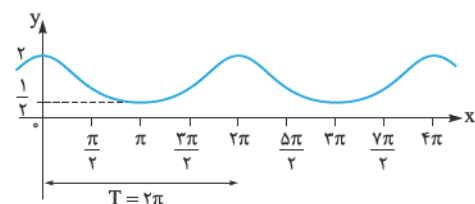
ب نمودار $y = [x]$ متناوب نیست!

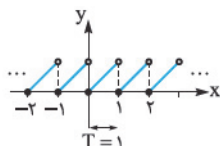


پ $\cos x$ متناوب است؛ پس $2^{\cos x}$ هم متناوب می‌شود؛ یعنی $2\pi, 2\pi$ تکرار می‌شود.

$$f(x) = 2^{\cos x} \Rightarrow f(x + 2\pi) = 2^{\cos(x + 2\pi)} = 2^{\cos x} = f(x)$$

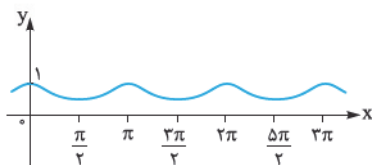
نمودار $f(x)$ هم این شکلی است:





ت نمودار $y = x - [x]$ از نمودارهای مهم است که باید آن را حفظ باشید، به آن نمودار اراده‌ای می‌گوییم. دوره تناوب این تابع $T = 1$ است.

ث چون $\sin x$ هر 2π تکرار می‌شود، پس $f(x) = \cos(\sin x)$ هم تکرار می‌شود، $f(x + 2\pi) = \cos(\sin(x + 2\pi)) = \cos(\sin x) = f(x)$ البته اتفاق جالبی که می‌افتد، این است که دوره تناوب اصلی این تابع یعنی کوچک‌ترین دوره تناوب آن $T = \pi$ می‌باشد؛ چون:

$$f(x + \pi) = \cos(\sin(x + \pi)) = \cos(-\sin x) = \cos(\sin x) = f(x)$$


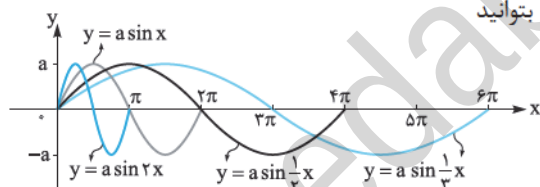
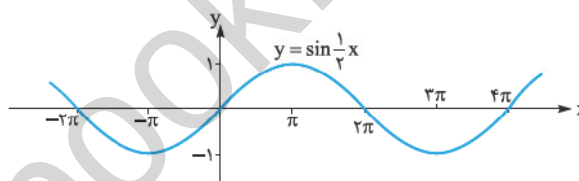
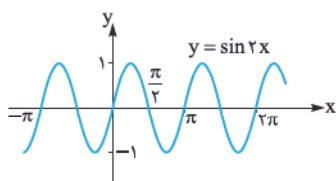
نمودار این تابع را بد نیست ببینید که این شکلی است:

تناوب در توابع مثلثاتی

نکته دوره تناوب اصلی نمودار توابع $y = \sin kx$ و $y = \cos kx$ برابر $\frac{2\pi}{|k|}$ است.

نکته بالا به ما می‌گوید دوره تناوب $y = \sin 2x$ برابر $\frac{2\pi}{2} = \pi$ و دوره تناوب $y = \sin \frac{1}{4}x$ برابر $\frac{2\pi}{1/4} = 8\pi$ است. به زبان غیرعلمی می‌گوییم نمودار

$y = \sin 2x$ ، ۲ برابر نسبت به $y = \sin x$ فشرده شده و نمودار $y = \sin(\frac{1}{4}x)$ دو برابر نسبت به آن باز شده است. نمودارها را ببینید:



در نمودار مقابل هم چندتای دیگر را در یک دوره از تناوب رسم کرده‌ایم تا بتوانید آن‌ها را با هم مقایسه کنید:

لطفاً دلیل این نوع رفتار توابع را درک کنید و خیلی زود و سطحی از آن‌ها گذر نکنید.

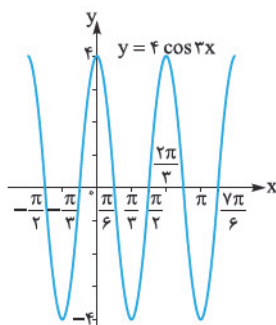
مثال دوره تناوب هر یک از توابع زیر را بیابید و نمودار آن‌ها را رسم کنید.

الف $y = 4 \cos 3x$

ب $y = -2 \sin \frac{1}{4}x$

پ $y = 3 \sin 2(x - \frac{\pi}{4})$

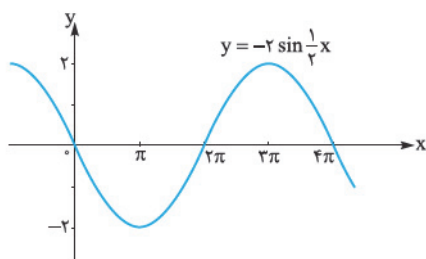
ت $y = \frac{3}{4} \cos(2x + \frac{2\pi}{3})$



حل **الف** دوره تناوب تابع $y = 4 \cos 3x$ برابر $T = \frac{2\pi}{3}$ است؛ پس ۳ برابر در جهت محور Xها فشرده‌تر می‌شود و باید برد آن را هم ۴ برابر کنیم. نمودار این شکلی است:

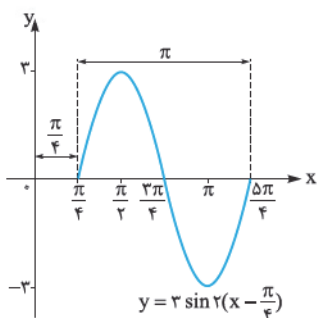


ب دوره تناوب تابع $T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$ است. نمودار ۲ برابر در جهت محور Xها باز می‌شود؛



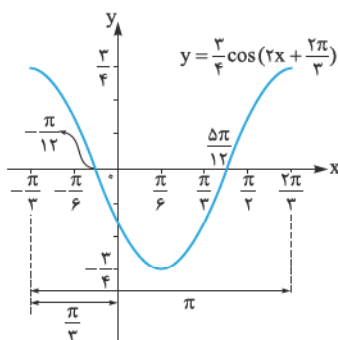
به علاوه باید آن را نسبت به محور Xها قرینه کرده و برد آن را هم ۲ برابر کنیم.

پ



دوره تناوب $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$ می‌شود؛ یعنی ۲ برابر فشرده.

$y = 3 \sin 2(x - \frac{\pi}{4})$
سمت راست می‌رود. برد ۳ برابر می‌شود.



ت اول باید $y = \frac{3}{4} \cos(2x + \frac{2\pi}{3})$ را به صورت $y = \frac{3}{4} \cos 2(x + \frac{\pi}{3})$ بنویسیم.

دوره تناوب π می‌شود؛ پس ۲ برابر فشرده.

$y = \frac{3}{4} \cos 2(x + \frac{\pi}{3})$
سمت چپ می‌رود. برد ۳/۴ برابر می‌شود.

مثال هر بار که قلب شما می‌تپد، ابتدا فشار خون شما افزایش یافته و سپس هنگامی که قلب بین ضربان‌ها استراحت می‌کند، کاهش می‌یابد. حداکثر و حداقل فشار خون به ترتیب، فشار سیستولیک و دیاستولیک (Systolic, Diastolic) گفته می‌شود و فشار خون شما به صورت $\frac{\text{سیستولیک}}{\text{دیاستولیک}}$ نوشته می‌شود؛ مثلاً فشار خون $\frac{120}{80}$ نرمال است. فشار خون فردی را با تابع روبه‌رو مدل‌سازی کرده‌ایم:

$$P(t) = 115 + 25 \sin(160\pi t)$$

که در آن $P(t)$ فشار بر حسب mmHg (میلی‌متر جیوه) و t زمان بر حسب دقیقه است.

الف دوره تناوب P را بیابید.

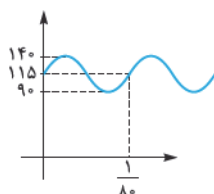
ب تعداد ضربان‌های قلب در هر دقیقه را پیدا کنید.

پ نمودار تقریبی P را رسم کنید.

ت وضعیت این فرد را چه‌طور تحلیل می‌کنید؟

حل

الف $T = \frac{2\pi}{|160\pi|} = \frac{1}{80}$



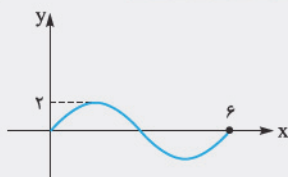
ب با توجه به رابطه بالا، در $\frac{1}{80}$ دقیقه یک بار قلب او می‌زند؛ پس در هر دقیقه ۸۰ بار.

پ

ت بیشترین مقدار فشار این فرد برابر $115 + 25 = 140$ و کم‌ترین میزان آن $115 - 25 = 90$ است؛ پس فشار او $\frac{140}{90}$ می‌باشد؛ پس این فرد فشار بالاتر از حد نرمال دارد (یا به اصطلاح پزشکی Hypertension در نظر گرفته می‌شود).

تست شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin(b\pi x)$ است. $a + b$ کدام است؟

(۵۳ طرح)

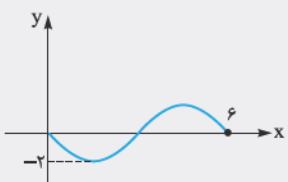


- (۲) $\frac{5}{3}$
(۴) $\frac{8}{3}$

- (۱) $\frac{4}{3}$
(۳) $\frac{7}{3}$

پاسخ گزینه ۳ **راه‌اول** بیشترین مقدار تابع برابر ۲ است؛ پس $a = 2$ به دست می‌آید. از روی نمودار، دوره تناوب تابع $T = 6$ است، از روی ضابطه $y = a \sin(b\pi x)$ ، دوره تناوب برابر $T = \frac{2\pi}{|b\pi|}$ به دست می‌آید. این دو مقدار را برابر می‌گذاریم:

$$T = \frac{2\pi}{|b\pi|} = 6 \Rightarrow |b| = \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{1}{3} \end{cases}$$



اگر $b = \frac{1}{3}$ باشد، ضابطه تابع $y = 2 \sin(\frac{\pi}{3}x)$ می‌شود و شبیه نمودار داده شده است؛ ولی اگر $b = -\frac{1}{3}$

باشد، ضابطه آن به صورت $y = 2 \sin(-\frac{\pi}{3}x) = -2 \sin(\frac{\pi}{3}x)$ است و نمودار آن این شکلی است:

$$a + b = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

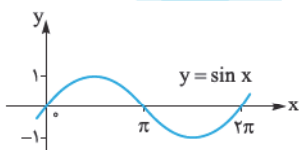
بنابراین:

راه دوم با کمی نبوغ می‌توانیم تست را خیلی شیک‌تر و قشنگ‌تر حل کنیم. از روی نمودار، رفتار تابع در $x = 6$ شبیه رفتار $y = \sin x$ در $x = 2\pi$ است؛ پس وقتی در عبارت $y = a \sin(b\pi x)$ ، x را برابر ۶ می‌گذاریم باید مقدار $b\pi x$ برابر 2π شود.

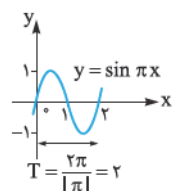
$$b\pi x \xrightarrow{x=6} b\pi(6) = 2\pi \Rightarrow b = \frac{1}{3} \Rightarrow a + b = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

چیزی که گفتیم کمی سخت است و انتظار نداشته باشید به راحتی به ذهن هر کسی برسد و بتواند از آن استفاده کند.

در زیر برای درک بهتر آن چه گفتیم، نمودار چند تابع را برایتان رسم می‌کنیم.

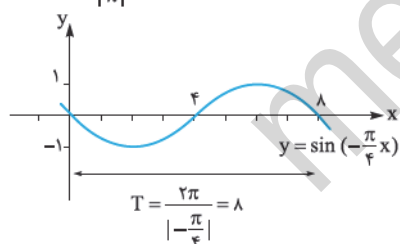


برای رسم $y = \sin \pi x$ طول نقاط نمودار $y = \sin x$ را $\frac{1}{\pi}$ برابر می‌کنیم.



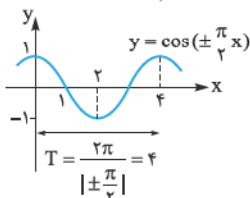
برای رسم $y = \sin(-\frac{\pi}{4}x)$ ، نمودار $y = \sin x$ را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم؛ به علاوه

طول نقاط در $\frac{\pi}{4}$ ضرب می‌شوند. توجه کنید که $y = \sin(-\frac{\pi}{4}x) = -\sin(\frac{\pi}{4}x)$.

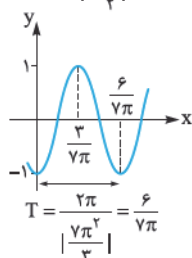


حالا $y = \cos(\pm \frac{\pi}{4}x)$ را رسم می‌کنیم. طول نقاط نمودار $y = \cos x$ در $\frac{\pi}{4}$ ضرب می‌کنیم.

توجه کنید که $y = \cos(-\frac{\pi}{4}x) = \cos(\frac{\pi}{4}x)$.

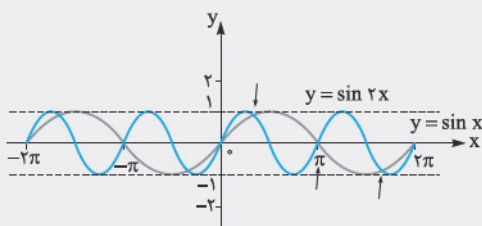


آخری هم سعی می‌کنیم یک مقدار عجیب باشد! نمودار $y = -\cos(\frac{\sqrt{\pi^2}}{3}x)$:





تست نمودار توابع $y = \sin x$ و $y = \sin 2x$ در فاصله $(0, 2\pi)$ در چند نقطه با هم برخورد می کنند؟



۲ (۱)

۵ (۴)

۲ (۱)

۴ (۳)

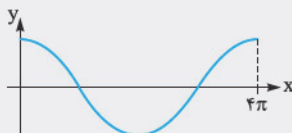
کتاب درسی تان این نمودار را رسم کرده است.

پاسخ گزینه ۲

مشخص است که نمودار دو تابع در فاصله $(0, 2\pi)$ در ۳ نقطه برخورد دارند. (نقاط برخورد را با فلش مشخص کردیم). دقت کنید که $x = 2\pi$ و $x = 0$ در بازه نیستند.

(ریاضی ۹۴)

تست شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $y = \frac{1}{2} + 2 \cos mx$ است. مقدار تابع در نقطه $x = \frac{16\pi}{3}$ کدام است؟



$\frac{1}{2}$ (۲)

$-\frac{1}{2}$ (۱)

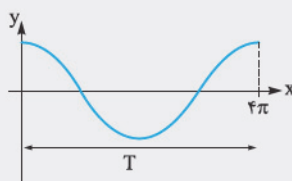
صفر (۴)

۱ (۳)

مطابق شکل، یک دوره تناوب از تابع به اندازه $T = 4\pi$ است.

پاسخ گزینه ۱

پس واضح است که $m = \frac{1}{2}$ می شود. (البته $m = -\frac{1}{2}$ هم قابل قبول است).



$$y = \frac{1}{2} + 2 \cos mx \xrightarrow{m=\frac{1}{2}} y = \frac{1}{2} + 2 \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$$

مقدار تابع را در $\frac{16\pi}{3}$ می خواهیم.

$$y\left(\frac{16\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + 2 \cos\left(\frac{16\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} + 2 \cos\left(\frac{8\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + 2 \cos\left(2\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + 2 \cos\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2} + 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{2\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

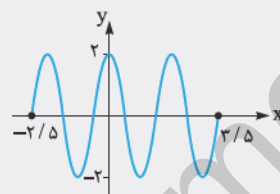
دو تکریم ۱

$$\frac{2\pi}{|m|} = 4\pi \Rightarrow |m| = \frac{1}{2} \Rightarrow m = \pm \frac{1}{2}$$

۲ دوره تناوب را این گونه هم می توانستید حساب کنید.

(ریاضی ۹۲)

تست شکل روبه رو قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin\left(\frac{\pi}{4} + bx\right)$ است. $a \times b$ کدام است؟



۲ / ۵ (۲)

۲ (۱)

۳ / ۵ (۴)

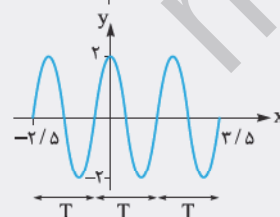
۳ (۳)

$$y = a \sin\left(\frac{\pi}{4} + b\pi x\right) = a \cos b\pi x$$

ابتدا ضابطه تابع را ساده می کنیم.

پاسخ گزینه ۱

طبق نمودار، برد تابع $[-2, 2]$ می باشد؛ پس $a = 2$ است. در فاصله $2/5$ تا $3/5$ تابع ۳ دوره از تناوبش را گذرانده!



$$3T = 3/5 - (2/5) \Rightarrow 3T = 6 \Rightarrow T = 2$$

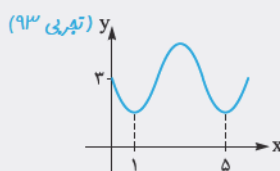
پس:

$$T = 2 = \frac{2\pi}{|b\pi|} \Rightarrow 2 = \frac{2}{|b|} \Rightarrow |b| = 1 \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

هر دو مقدار به دست آمده برای b قابل قبول است؛ چون کسینوس منفی را می خورد! بنابراین $a \times b = 2 \times (\pm 1) = \pm 2$ می شود که فقط $+2$ در گزینه ها هست.

(تجربی ۹۳)

تست شکل روبه رو قسمتی از نمودار تابع $y = a + \sin(b\pi x)$ است. مقدار y در نقطه $x = \frac{25}{3}$ کدام است؟



۲ / ۵ (۲)

۲ (۱)

۳ / ۵ (۴)

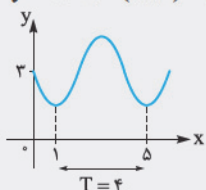
۳ (۳)

$$y = a + \sin(b\pi x) \Rightarrow y(0) = a + \sin(0) \Rightarrow a = 3$$

مقدار تابع در $x = 0$ برابر ۳ شده است:

پاسخ گزینه ۲

مطابق شکل، دوره تناوب تابع برابر $T = 4$ است.



$$T = 4 = \frac{2\pi}{|b\pi|} \Rightarrow |b| = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

بعد از $x = 0$ ، نمودار تابع پایین آمده است؛ پس $b = -\frac{1}{2}$ قابل قبول است. اگر $b = \frac{1}{2}$ بود، نمودار باید این شکلی می‌شد؛ در حالی که الان

این شکلی است. حالا مقدار تابع را در $x = \frac{25}{3}$ به دست می‌آوریم:

$$y = 3 + \sin\left(-\frac{\pi}{2}x\right) \xrightarrow{x=\frac{25}{3}} y\left(\frac{25}{3}\right) = 3 - \sin\left(\frac{25\pi}{6}\right) = 3 - \sin\left(\frac{24\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) = 3 - \sin(4\pi + \frac{\pi}{6}) = 3 - \sin\frac{\pi}{6} = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

مدل سازی با استفاده از توابع مثلثاتی

در حالت کلی می‌توان گفت در توابع $y = a \sin bx + c$ و $y = a \cos bx + c$ ، حداکثر و حداقل مقدار تابع وقتی به دست می‌آید که $\sin x = \pm 1$ و $\cos x = \pm 1$ باشد. پس می‌توان گفت که:

۱) مقدار ماکزیمم $|a| + c$ است. ۲) مقدار مینیمم $-|a| + c$ است. ۳) دوره تناوب $T = \frac{2\pi}{|b|}$ است.

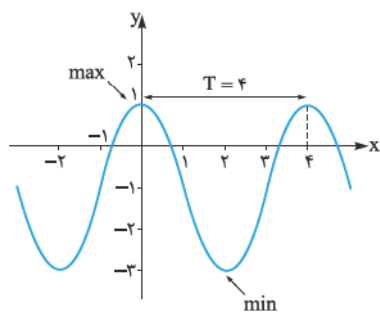
برای مثال در تابع $y = 2 \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) - 1$ داریم:

۱) $\max = 2 - 1 = 1$

۲) $\min = -2 - 1 = -3$

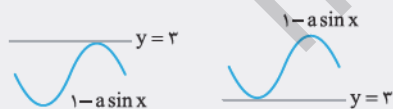
۳) $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 8$

نمودار را ببینید:



تست خط $y = 3$ بر نمودار تابع $y = 1 - a \sin(x)$ مماس است. مجموعه مقادیر a کدام است؟

۱) ± 1 ۲) ± 2 ۳) $-1, 2$ ۴) $1, -2$

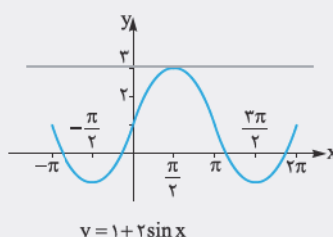
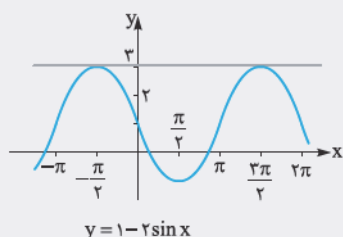


وقتی تابع بر خط $y = 3$ مماس است که نمودار شبیه یکی از دو شکل روبه‌رو باشد: بنابراین یا ماکزیمم تابع $y = 1 - a \sin x$ برابر ۳ است و یا مینیمم آن.

$\max: |a| + 1 = 3 \Rightarrow |a| = 2 \Rightarrow a = \pm 2$ ✓

$\min: -|a| + 1 = 3 \Rightarrow |a| = -2$ ✗

نمودار تابع $y = 1 - 2 \sin x$ و $y = 1 + 2 \sin x$ را هم برایتان رسم می‌کنیم:





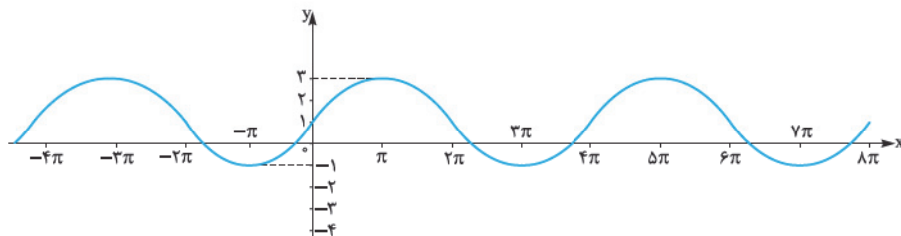
نکته برعکس اگر در سؤال‌های مقادیر $\max$ و $\min$ توابع $y = a \sin bx + c$ و $y = a \cos bx + c$ را داشته باشیم، داریم:

۱ $|a| = \frac{\max - \min}{2}$

۲ $c = \frac{\max + \min}{2}$

(کتاب درسی)

مثال ضابطه مربوط به نمودار زیر را بنویسید.



حل از نمودار می‌فهمیم که $\max = 3$ و $\min = -1$ است و نمودار شبیه $y = a \sin bx + c$ است.

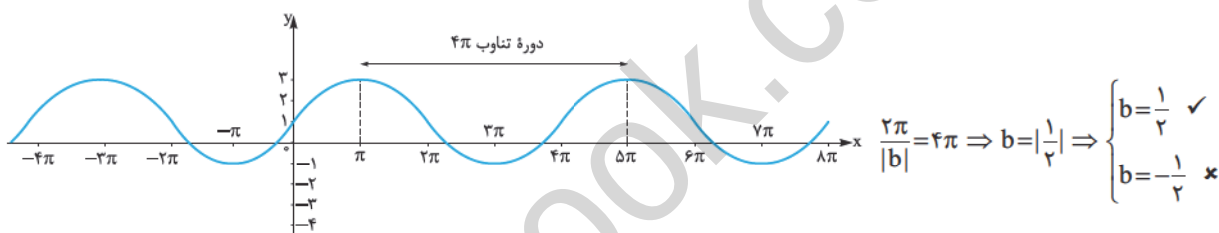
$$a = \frac{\max - \min}{2} = \frac{3 - (-1)}{2} = 2$$

$$c = \frac{\max + \min}{2} = \frac{3 + (-1)}{2} = 1$$

$$|b| = \frac{2\pi}{T}$$

پس تابع به صورت $y = 2 \sin bx + 1$ است، می‌ماند دوره تناوب.

از نمودار مشخص است که دوره تناوب برابر 4π است.



با توجه به این که نمودار بعد از صفر این شکلی است: پس b باید مثبت باشد و ضابطه مربوط به این تابع $y = 2 \sin \frac{x}{2} + 1$ است. این تمرین از کتاب درسی ۴ قسمت دارد که بقیه آن‌ها را در تمرین تشریحی این درس‌نامه حل کردیم. خیلی مهم هستند. لطفاً حتماً آن‌ها را حل کنید.

(کتاب درسی)

مثال در هر مورد ضابطه تابعی مثلثاتی با دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم داده شده بنویسید.

الف $T = 3, \max = 9, \min = 3$

ب $T = \frac{\pi}{2}, \max = -3, \min = -7$

حل الف $y = -3 \sin(\frac{2\pi}{3}x) + 6$ یا $y = 3 \cos(\frac{2\pi}{3}x) + 6$ هر دو قابل قبول اند. مثال‌های دیگری هم می‌توانیم بیاوریم:

$$\frac{\max - \min}{2} = \frac{9 - 3}{2} = 3 \quad (\text{ضرب کلی})$$

$$\frac{\max + \min}{2} = \frac{9 + 3}{2} = 6 \quad (\text{عدد ثابت})$$

$$x \text{ ضرب: } \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{3}$$

ب $y = 2 \sin(4x) - 5$ یا $y = -2 \cos(-4x) - 5$ هر دو قابل قبول اند.

$$\frac{\max - \min}{2} = \frac{-3 - (-7)}{2} = 2 \quad (\text{ضرب کلی})$$

$$\frac{\max + \min}{2} = \frac{-3 + (-7)}{2} = -5 \quad (\text{عدد ثابت})$$

$$x \text{ ضرب: } \frac{2\pi}{T} = 4$$

تست طول روز در یک سال، یک متغیر تناوبی است. اگر طول روز t ام را با $L(t) = A \sin(Bt) + C$ نمایش دهیم و طول سال را ۳۶۵ روز فرض کنیم، مقدار تقریبی B کدام است؟ ($\pi = 3/14$)

۰/۰۲۵ (۴)

۰/۰۲ (۳)

۰/۰۱۷ (۲)

۰/۰۱۵ (۱)

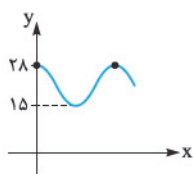
$$\frac{2\pi}{|B|} = 365 \Rightarrow \frac{2 \times 3/14}{B} = 365 \Rightarrow B = \frac{6/28}{365} \approx 0/017$$

دوره تناوب $L(t)$ برابر ۳۶۵ روز است.

پاسخ گزینه ۲

مثال مجموعه‌ای از داده‌های مربوط به دمای هوای یک شهر داده شده‌اند. اگر داده‌های این شهر هر ۱۲ ماه یک بار تکرار شده باشند و بیشترین و کم‌ترین دما در داده‌ها به ترتیب ۲۸ و ۱۵ درجه سانتی‌گراد باشند. آن‌گاه با فرض این‌که تابعی کسینوسی به صورت $y = a \cos(bx) + c$ برای داده‌ها مناسب باشد. این تابع را بیابید.

(کتاب درسی)



$$\frac{2\pi}{b} = 12 \Rightarrow b = \frac{\pi}{6}$$

حل چون داده‌ها هر ۱۲ ماه تکرار می‌شوند؛ پس دوره تناوب باید ۱۲ باشد. پس:

به نمودار تقریبی که برای این داده‌ها کشیده‌ایم، توجه کنید.

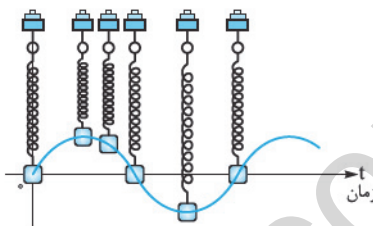
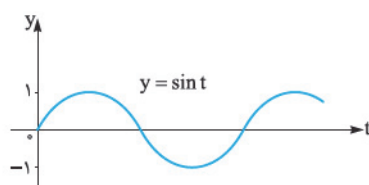
c برابر میانگین کم‌ترین و بیشترین مقدار تابع است:

$$c = \frac{28 + 15}{2} = 21.5$$

$$a = \frac{28 - 15}{2} = 6.5$$

و a هم برابر تفاضل بیشترین مقدار و کم‌ترین مقدار تابع تقسیم بر ۲ است:

مثال اگر وزنه‌ای را به یک فنر متصل کنیم و آن را رها کنیم. حرکت این فنر را می‌توانیم به کمک توابع مثلثاتی مدل‌سازی کنیم. در شکل زیر اگر t برحسب زمان باشد، وزنه روی نمودار $y = \sin t$ حرکت می‌کند.



برای مثال فرض کنید حرکت وزنه‌ای متصل به یک فنر با رابطه مقابل مدل‌سازی شده باشد:

$$y = 10 \sin 4\pi t$$

الف بیشترین فاصله وزنه از حالت تعادلش چه قدر است؟

ب مدت زمانی که طول می‌کشد تا وزنه یک نوسان کامل انجام بدهد، چه قدر است؟

پ این وزنه در یک ثانیه چند بار نوسان می‌کند؟

حل **الف** وقتی که $\sin 4\pi t = \pm 1$ است، وزنه بیشترین فاصله از حالت تعادل را دارد که در این صورت بیشترین فاصله برابر ± 10 cm است.

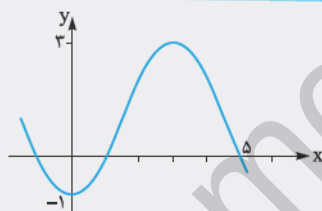
$$T = \frac{2\pi}{|4\pi|} = \frac{1}{2} \text{ s}$$

ب هر 0.5 ثانیه، وزنه یک نوسان می‌کند.

پ با توجه به قسمت قبل، در یک ثانیه ۲ بار نوسان دارد.

طبق معمول هم انتظار نداشته باشید که آخرین سؤال راحت باشد.

تست شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع $y = a - 2 \cos(b\pi x)$ است. $a + b$ کدام می‌تواند باشد؟



$$\frac{7}{6} \quad (2)$$

$$\frac{16}{3} \quad (4)$$

$$-\frac{2}{3} \quad (1)$$

$$\frac{4}{3} \quad (3)$$

$$y(0) = a - 2 \cos(0) = a - 2 = -1 \Rightarrow a = 1$$

پاسخ گزینه ۳ اول این‌که مقدار تابع در $x = 0$ برابر -1 است.

$$y = 0 \Rightarrow 1 - 2 \cos(b\pi x) = 0 \Rightarrow \cos b\pi x = \frac{1}{2}$$

پس ضابطه تابع $y = 1 - 2 \cos(b\pi x)$ است. آن را برابر صفر می‌گذاریم:

در نقاطی که $\cos(b\pi x)$ برابر $\frac{1}{2}$ باشد، مقدار تابع صفر می‌شود. در دایره مثلثاتی وقتی از $x = 0$ شروع به حرکت در جهت مثبت می‌کنیم، اول در

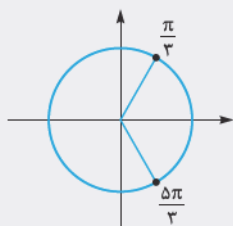
$x = \frac{\pi}{3}$ و سپس در $x = \frac{5\pi}{3}$ مقدار کسینوس برابر صفر می‌شود.

نمودار به ما می‌گوید دومین نقطه‌ای که تابع صفر می‌شود، در $x = 5$ است؛ یعنی $b\pi x$ به ازای $x = 5$ برابر $\frac{5\pi}{3}$ است:

$$b\pi(5) = \frac{5\pi}{3} \Rightarrow b = \frac{1}{3}$$

$$a + b = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

البته b برابر $-\frac{1}{3}$ هم می‌تواند باشد.



۳. بچه‌هایی که الان هی‌رن سراغ تمرین‌های تشریحی ۱ تا ۶ و تست‌های ۱ تا ۲۸ گرم.



مسائل تشریحی

درس اول: تناوب

۱- دوره تناوب هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

الف) $f(x) = \sin 3x$

ب) $g(x) = \cos \sqrt{2}x$

پ) $h(x) = \sin \frac{x}{2}$

ت) $s(x) = \sin \pi x$

ث) $t(x) = -\pi \sin \frac{1}{4}(x-2)$

۲- ثابت کنید اگر تابع f متناوب به دوره تناوب T باشد، آن‌گاه $\cos$ هم با همین دوره تناوب، متناوب است.

۳- نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y = \cos(-x) + 1$

ب) $y = \cos(x + \frac{\pi}{4})$

پ) $y = 1 + \sin(x+1)$

ت) $y = |1 - \sin x|$

ث) $y = \frac{1}{4} \sin(x - \frac{\pi}{4})$

۴- نمودار توابع زیر را رسم کنید.

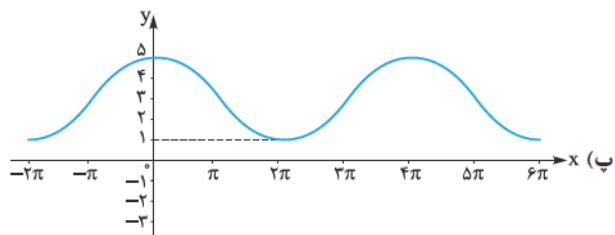
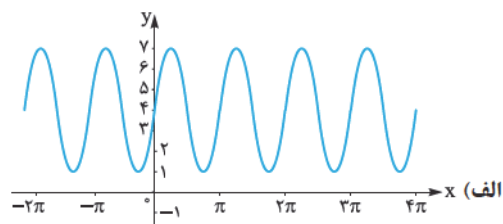
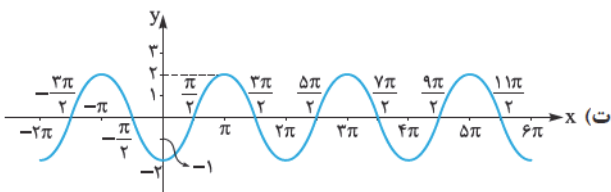
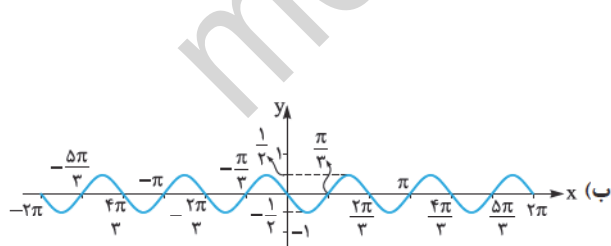
الف) $y = 2 \cos 2x$

ب) $y = -\frac{1}{4} \cos(\frac{1}{4}x)$

پ) $y = \sin \pi x$

ت) $y = -2 \cos(\frac{\pi x}{4})$

۵- هر یک از نمودارهای داده شده در زیر، مربوط به تابعی با ضابطه $f(x) = a \sin bx + c$ یا $f(x) = a \cos bx + c$ است. با دقت در شکل نمودار و تشخیص دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع، ضابطه آن را مشخص نمایید.



۶- در هر مورد ضابطه تابعی مثلثاتی با دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم داده شده بنویسید.

الف) $T = \pi$, $\max = 3$, $\min = -3$

ب) $T = 2$, $\max = -1$, $\min = -7$



پرسش‌های چندگزینه‌ای

درس اول: تناوب

۱- در یک تابع متناوب با دوره تناوب $T=1$ ، می‌دانیم $f(\frac{3}{4}) = -\frac{1}{4}$ است. آن‌گاه کدام گزینه لزوماً صحیح است؟

$$f(-\frac{1}{4}) = -\frac{1}{4} \quad (۴)$$

$$f(-\frac{1}{4}) = \frac{1}{4} \quad (۳)$$

$$f(\frac{5}{4}) = \frac{1}{4} \quad (۲)$$

$$f(\frac{5}{4}) = -\frac{1}{4} \quad (۱)$$

۲- کوچک‌ترین دوره تناوب تابع $y = |\sin \frac{\pi}{4} x|$ کدام است؟

$$4\pi \quad (۴)$$

$$2\pi \quad (۳)$$

$$4 \quad (۲)$$

$$2 \quad (۱)$$

۳- کدام تابع، متناوب نیست؟

$$y = \cos^2 x \quad (۴)$$

$$y = \sin^2 x \quad (۳)$$

$$y = \sin |x| \quad (۲)$$

$$y = \cos |x| \quad (۱)$$

۴- دوره تناوب تابع $y = af(bx+c)+d$ برابر T است. در این صورت دوره تناوب تابع $y = f(x)$ برابر کدام گزینه می‌باشد؟

$$\frac{T}{|a|} \quad (۴)$$

$$T \quad (۳)$$

$$|b|T \quad (۲)$$

$$\frac{T}{|b|} \quad (۱)$$

۵- یک سری داده آماری را می‌خواهیم با موج سینوسی $asin(bt)+c$ مدل‌سازی کنیم. اگر بیشترین مقدار و کم‌ترین مقدار این داده‌ها به ترتیب برابر ۲۸ و $\frac{4}{3}$ باشند، a کدام است؟ (کتاب درسی)

$$16/15 \quad (۴)$$

$$11/85 \quad (۳)$$

$$23/7 \quad (۲)$$

$$28 \quad (۱)$$

۶- می‌خواهیم وضعیت آب‌وهوای یک سال شهری را با تابعی به صورت $f(t) = asin(bt)+c$ مدل‌سازی کنیم که t برحسب روز است. مقدار b کدام است؟

$$\frac{\pi}{365} \quad (۴)$$

$$\frac{2\pi}{365} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{6} \quad (۲)$$

$$\frac{\pi}{6} \quad (۱)$$

۷- ماکزیمم تابع $y = 1 - 2\sin \frac{x}{4}$ برابر کدام گزینه است؟

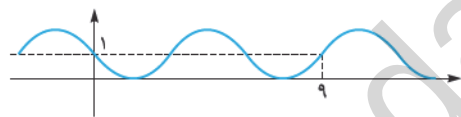
$$3 \quad (۴)$$

$$-1 \quad (۳)$$

$$1 \quad (۲)$$

$$\text{صفر} \quad (۱)$$

(کانون ۹۵)



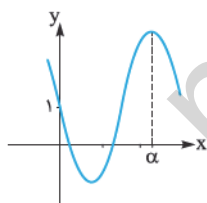
۸- شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a + \cos(\frac{1}{4} + bx)\pi$ است. حاصل $f(29)$ کدام است؟

$$1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (۲)$$

$$1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (۱)$$

$$\frac{3}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۳)$$



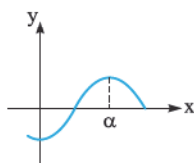
۹- شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع $y = 1 - 2\sin 2x$ است. α کدام است؟

$$\frac{\pi}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{\pi}{4} \quad (۱)$$

$$\frac{3\pi}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{3\pi}{4} \quad (۳)$$



۱۰- شکل مقابل قسمتی از تابع $y = 2\sin \pi x - 1$ است. α کدام است؟

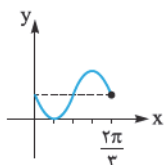
$$1 \quad (۲)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۱)$$

$$2 \quad (۴)$$

$$\frac{3}{2} \quad (۳)$$

(ریاضی ۵-۶)



۱۱- شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $y = 1 - \sin mx$ است. مقدار تابع در نقطه $x = \frac{7\pi}{6}$ کدام است؟

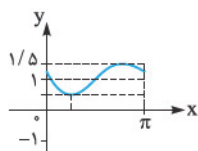
$$\frac{1}{2} \quad (۲)$$

$$\text{صفر} \quad (۱)$$

$$2 \quad (۴)$$

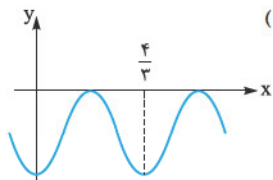
$$1 \quad (۳)$$

۱۲- شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع با ضابطه $y = 1 + a \sin(bx - \frac{\pi}{6})$ است. $a + b$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۵)



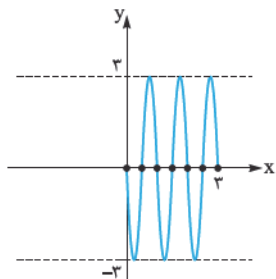
- (۱) $\frac{1}{2}$
(۲) ۱
(۳) $\frac{3}{2}$
(۴) ۲

۱۳- شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $f(x) = -2 + a \cos(1 + bx)\pi$ است. ab کدام می‌تواند باشد؟ ($a > 0$)



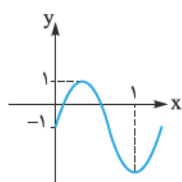
- (۱) $\frac{3}{2}$
(۲) $\frac{5}{2}$
(۳) ۳
(۴) ۵

۱۴- شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin(b\pi x)$ است. ab کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۷)



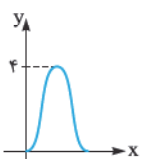
- (۱) -۶
(۲) -۳
(۳) ۴/۵
(۴) ۶

۱۵- شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin b\pi x - 1$ است. مقدار $a + b$ کدام می‌تواند باشد؟



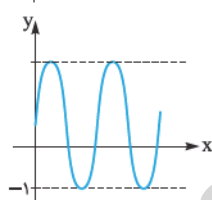
- (۱) ۲/۵
(۲) ۳
(۳) ۳/۵
(۴) ۴

۱۶- شکل مقابل نمودار تابع $y = a + b \cos(\frac{\pi}{4}x)$ در بازه $(0, 4)$ است. b کدام است؟ (ریاضی ۹۷)



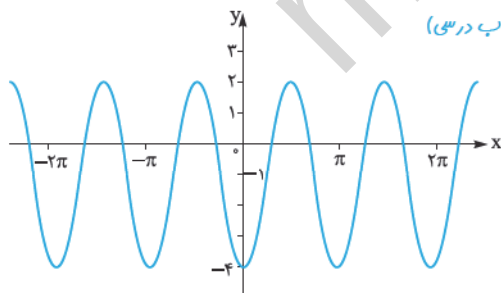
- (۱) -۲
(۲) -۱
(۳) ۱
(۴) ۲

۱۷- شکل روبه‌رو نمودار تابع $y = 1 + a \sin(b\pi x)$ در بازه $(0, \frac{4}{3})$ است. $a + b$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۷)



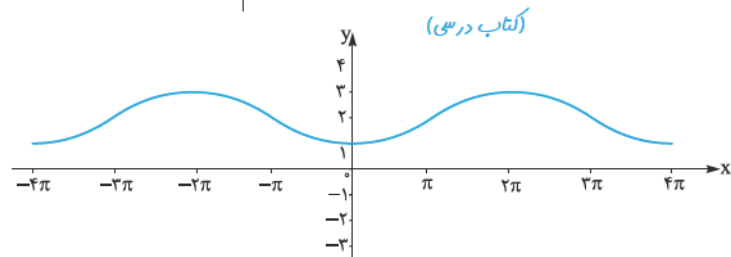
- (۱) ۳
(۲) ۴
(۳) ۵
(۴) ۶

۱۸- ضابطه مربوط به نمودار مقابل، کدام است؟ (کتاب درسی)



- (۱) $y = -3 \cos(\frac{X}{4}) - 1$
(۲) $y = -3 \cos(-2x) - 1$
(۳) $y = \cos(\frac{X}{4}) - 4$
(۴) $y = \cos(2x) - 4$

۱۹- نمودار مقابل مربوط به کدام تابع است؟ (کتاب درسی)



- (۱) $y = 2 - \cos \frac{X}{4}$
(۲) $y = 1 + \sin \frac{X}{4}$
(۳) $y = 2 \cos \frac{X}{4} - 1$
(۴) $y = 2 \sin \frac{X}{4} + 1$



۲۰- در تابع $y = a + b \sin cx$ اختلاف ماکزیمم و مینیمم برابر ۴ و مجموع آن‌ها برابر ۶ است. حاصل $a + |b|$ کدام است؟

- (۱) ۷ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

(کتاب درسی)

۲۱- کدام تابع زیر دارای هر سه ویژگی $T = 3$ ، $\max = 9$ و $\min = 3$ است؟

- (۱) $y = 3 + 6 \cos(\frac{2\pi}{3}x)$ (۲) $y = 6 - 3 \sin(\frac{2\pi}{3}x)$ (۳) $y = 6 + 3 \cos(\frac{3\pi}{4}x)$ (۴) $y = 3 - 6 \sin(\frac{3\pi}{4}x)$

۲۲- تابع $y = -2 \cos 3x$ در بازه $[0, 2\pi]$ در چند نقطه به ماکزیمم مقدار خود می‌رسد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۲۳- دوره تناوب تابع $y = 8 \cos \frac{x}{3}$ چند برابر دوره تناوب تابع $y = 3 \sin 2x$ است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

۲۴- برای هر x عضو دامنه f ، $x \pm T$ نیز عضو دامنه f است. با فرض $f(x \pm T) = -f(x)$ ، آن‌گاه دوره تناوب اصلی f کدام است؟ ($T > 0$)

- (۱) T (۲) $2T$ (۳) $3T$ (۴) $4T$

۲۵- اگر در نقاط $x = \frac{\pi}{4}$ و $x = \frac{3\pi}{4}$ ، تابع $f(x) = 2 \cos bx - 1$ با ماکزیمم مقدار خود برابر باشد، دوره تناوب f برابر کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) $\frac{\pi}{3}$ (۲) $\frac{\pi}{10}$ (۳) $\frac{2\pi}{3}$ (۴) $\frac{\pi}{5}$

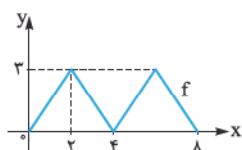
(کانون ۹۴)

۲۶- تابع متناوب f در بازه $[0, 1]$ با ضابطه $f(x) = \sqrt{x + \frac{1}{4}}$ تعریف می‌شود. اگر دوره تناوب تابع برابر یک باشد، $f(-3/76)$ کدام است؟

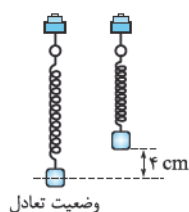
- (۱) تعریف نشده (۲) $0/1$ (۳) $0/7$ (۴) $\sqrt{1/01}$

(کانون ۹۶)

۲۷- دوره تناوب تابع f برابر $T = 4$ است. اگر قسمتی از نمودار تابع f به صورت زیر باشد، آن‌گاه حاصل $f(1395)$ کدام است؟



- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{5}{4}$



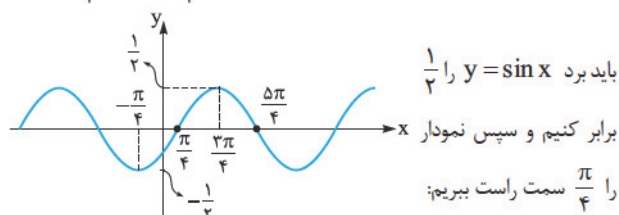
وضعیت تعادل

۲۸- مطابق شکل، وزنه‌ای را به یک فنر متصل کرده و به فاصله ۴ سانتی‌متری از حالت تعادلش می‌بریم و رها می‌کنیم. اگر بعد از $\frac{1}{3}$ ثانیه وزنه به جایی که رها شده بود برگردد، می‌توانیم حرکت آن را به کمک $y = a \cos \omega t$ مدل‌سازی کنیم. $\frac{\omega}{a}$ کدام است؟

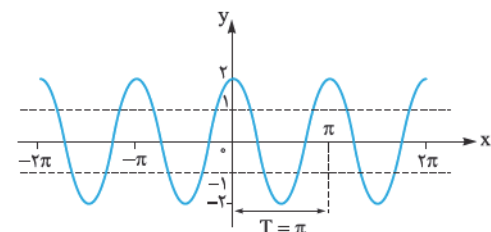
- (۱) π (۲) 2π (۳) $\frac{3\pi}{2}$ (۴) 4π

پاسخ مسائل تشریحی

ث) $y = \frac{1}{4} \sin(x - \frac{\pi}{4})$

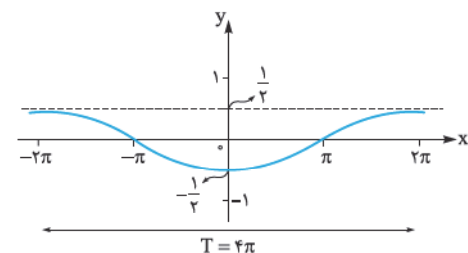


۴- الف)



عرض نقاط را ۲ برابر کرده‌ایم تا نمودار $2 \cos x$ به دست آید؛ سپس طول نقاط را $\frac{1}{2}$ برابر می‌کنیم تا به $y = 2 \cos 2x$ برسیم.

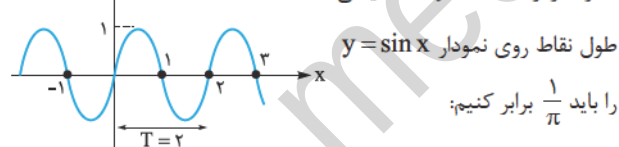
ب)



نمودار نسبت به محور xها قرینه شده است.

برد تابع $\frac{1}{2}$ برابر شده است و به علاوه طول نقاط هم ۲ برابر می‌شوند. دوره تناوب تابع برابر 4π به دست می‌آید.

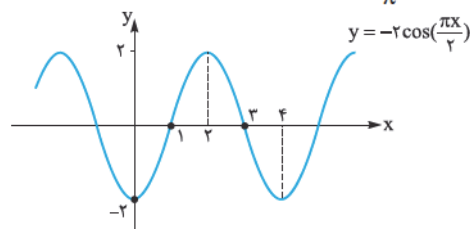
پ) دوره تناوب $y = \sin \pi x$ برابر $T = \frac{2\pi}{\pi} = 2$ است و نمودار π برابر فشرده‌تر از $y = \sin x$ است؛ یعنی



توجه دارید که رفتار تابع در $x = 2$ مشابه رفتار $y = \sin x$ در $x = 2\pi$ است.

ت) دوره تناوب تابع $y = -2 \cos(\frac{\pi x}{4})$ برابر $T = \frac{2\pi}{\pi/4} = 8$ است. به علاوه

باید نمودار $y = \cos x$ را نسبت به محور xها قرینه کنیم و برد آن را نیز ۲ برابر کنیم و طول نقاط هم $\frac{2}{\pi}$ برابر می‌شوند:



رفتار تابع در $x = 1$ مشابه رفتار $y = -2 \cos x$ در $x = \frac{\pi}{4}$ است.

الف) $T = \frac{2\pi}{|\frac{2}{3}|} = \frac{2\pi}{3}$

ب) $T = \frac{2\pi}{|\sqrt{2}|} = \sqrt{2}\pi$

۱-

پ) $T = \frac{2\pi}{|\frac{1}{4}|} = 8\pi$

ت) $T = \frac{2\pi}{|\pi|} = 2$

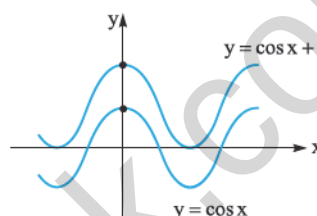
ث) $T = \frac{2\pi}{|\frac{1}{2}|} = 4\pi$

۲- چون دوره تناوب f برابر T است، می‌دانیم:
حالا برای تابع gof داریم:

$$(\text{gof})(x + T) = g(f(x + T)) = g(f(x)) = (\text{gof})(x)$$

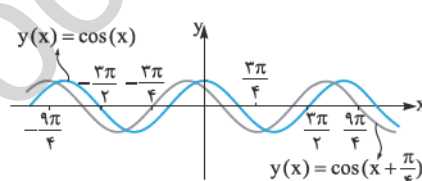
پس تابع gof هم متناوب است.

۳- الف) $y = \cos(-x) + 1 = \cos x + 1$



نمودار $\cos x$ را به اندازه ۱ واحد بالا می‌بریم:

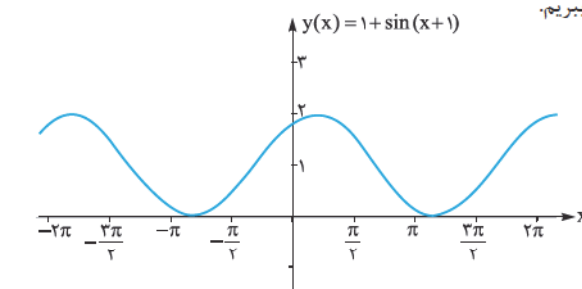
ب) $y = \cos(x + \frac{\pi}{4})$



باید نمودار $y = \cos x$ را $\frac{\pi}{4}$ به سمت چپ ببریم:

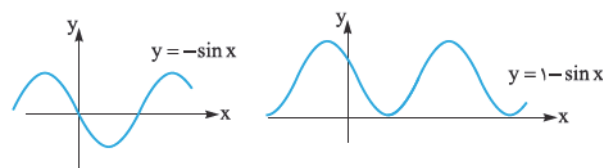
پ) $y = 1 + \sin(x + 1)$

نمودار $y = \sin x$ را باید ۱ واحد (تقریباً $\frac{\pi}{3}$) سمت چپ و سپس ۱ واحد بالا ببریم.



ت) $y = |1 - \sin x|$

اول نمودار $y = 1 - \sin x$ را می‌کشیم:



نمودار $y = 1 - \sin x$ همواره نامنفی است؛ چون بالای محور xها قرار دارد. پس قدرمطلق آن خودش می‌شود؛ یعنی:

$$y = |1 - \sin x| = 1 - \sin x$$



$$a = \frac{\max - \min}{2} = \frac{-1 - (-7)}{2} = 3$$

(ب)

$$c = \frac{\max + \min}{2} = \frac{-1 + (-7)}{2} = -4$$

$$T = 2 = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = \pi$$

نمونه‌هایی از توابع با این ویژگی عبارتند از: $y = 3 \sin \pi x - 4$ یا $y = 3 \cos \pi x - 4$.

۵- الف) نمودار شبیه $y = a \sin bx + c$ است.

$$a = \frac{\max - \min}{2} = \frac{7 - 1}{2} = 3 \quad c = \frac{\max + \min}{2} = \frac{7 + 1}{2} = 4$$

دوره تناوب تابع داده شده برابر π است؛ پس:

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = 2 \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \checkmark \\ b = -2 \times \end{cases}$$

تابع به صورت $y = 3 \sin(2x) + 4$ است؛ چون نمودار بعد از صفر این شکلی است:



(ب) نمودار شبیه $y = a \sin bx + c$ است.

$$a = \frac{\max - \min}{2} = \frac{1 - (-1)}{2} = 1 \quad c = \frac{\max + \min}{2} = 0$$

دوره تناوب تابع هم که برابر $T = \frac{2\pi}{3}$ است.

$$\frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = 3 \Rightarrow \begin{cases} b = 3 \times \\ b = -3 \checkmark \end{cases}$$

با توجه به این که نمودار بعد از صفر این شکلی است:

$$y = \frac{1}{3} \sin(-3x) = -\frac{1}{3} \sin 3x$$

(پ) نمودار شبیه $y = a \cos bx + c$ است.

$$a = \frac{\max - \min}{2} = \frac{5 - 1}{2} = 2 \quad c = \frac{\max + \min}{2} = \frac{5 + 1}{2} = 3$$

دوره تناوب تابع برابر 4π است.

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = 4\pi \Rightarrow |b| = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{2} \checkmark \\ b = -\frac{1}{2} \checkmark \end{cases}$$

عبارت داخل کسینوس می‌تواند منفی یا مثبت باشد. فرقی ندارد؛ چون نمودار اطراف صفر این شکلی است:

$$y = 2 \cos\left(\pm \frac{x}{2}\right) + 3$$

(ت) نمودار شبیه $y = a \cos bx + c$ است.

$$a = \frac{\max - \min}{2} = \frac{2 - (-2)}{2} = 2$$

$$c = \frac{\max + \min}{2} = \frac{2 + (-2)}{2} = 0$$

دوره تناوب تابع هم که 2π است؛ پس $b = \pm 1$ می‌شود. با توجه به این که نمودار اطراف صفر این شکلی است:

$$y = -2 \cos x$$

۶- الف) اگر ضابطه تابع را به صورت $y = a \sin bx + c$ یا

$y = a \cos bx + c$ بگیریم، داریم:

$$a = \frac{\max - \min}{2} = \frac{3 - (-3)}{2} = 3$$

$$c = \frac{\max + \min}{2} = \frac{3 + (-3)}{2} = 0$$

دوره تناوب هم که π است:

نمونه‌هایی از توابع با این ویژگی عبارتند از: $y = 3 \sin 2x$ یا $y = 3 \cos 2x$.



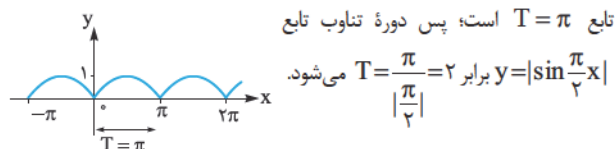
پاسخ پرسش‌های چندگزینه‌ای فصل دوم

۱- گزینه ۱ می‌دانیم وقتی $T=1$ است، $f(x+1)=f(x)$ می‌شود؛

یعنی وقتی ۱ واحد روی نمودار جابه‌جا شویم، مقدار تابع تغییری نمی‌کند. پس اگر از $x = \frac{3}{4}$ به اندازه ۱ واحد عقب برویم، داریم:

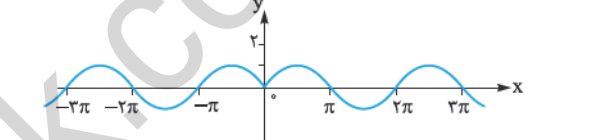
$$f\left(\frac{3}{4}\right) = f\left(\frac{3}{4} - 1\right) = f\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}$$

۲- گزینه ۱ نمودار $y = |\sin x|$ به ما می‌گوید که دوره تناوب این



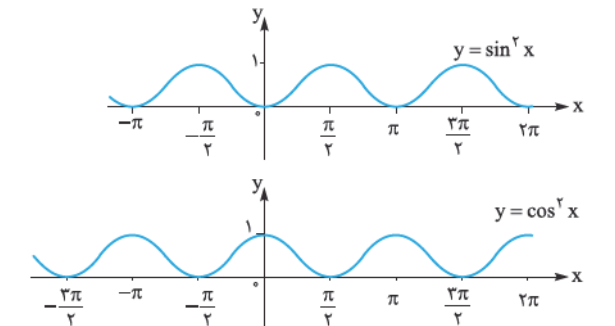
۳- گزینه ۲ می‌دانیم $\cos |x| = \cos x$ است؛ پس گزینه (۱)

حتماً متناوب است. برای رسم $\sin |x|$ ، نمودار $\sin x$ را رسم می‌کنیم، عبارت سمت چپ را پاک کرده و قرینه سمت راست را رسم می‌کنیم:



پس متناوب نیست.

در گزینه‌های (۳) و (۴)، $f(x+\pi) = f(x)$ است؛ پس هر دو متناوب هستند. نمودار آن‌ها را هم کشیده‌ایم که از دیدنشان لذت ببرید.



۴- گزینه ۲ اگر دوره تناوب $f(x)$ برابر T باشد، آن‌گاه دوره

تناوب $f(bx)$ برابر $\frac{T}{|b|}$ است؛ حالا برعکس آن را سؤال خواسته.

دوره تناوب d از $af(bx+c)$ برابر T است؛ پس دوره تناوب $f(x)$ برابر $|b|T$ می‌شود.

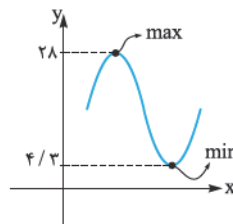
۵- گزینه ۳ نمودار باید روی این

نقاط قرار بگیرد.

به شکل نگاه کنید. a برابر تفاضل بیشترین مقدار و کم‌ترین مقدار، تقسیم بر ۲ است.

$$a = \frac{28 - 4/3}{2} = 11/3$$

در ضمن $c = \frac{28 + 4/3}{2} = 14/3$ می‌شود.



۶- گزینه ۳ دوره تناوب ۳۶۵ است؛ زیرا t را برحسب روز گرفته‌ایم

و یکسال ۳۶۵ روز می‌شود. $\frac{2\pi}{|b|} = 365 \Rightarrow b = \frac{2\pi}{365}$

۷- گزینه ۴ می‌دانیم $-1 \leq \sin \frac{x}{4} \leq 1$ می‌باشد؛ پس:

$$-2 \leq -2 \sin \frac{x}{4} \leq 2 \xrightarrow{+1} -1 \leq 1 - 2 \sin \frac{x}{4} \leq 3$$

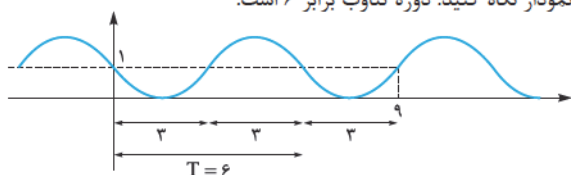
بنابراین بیشترین مقدار یا همان ماکزیمم تابع برابر ۳ است.

۸- گزینه ۱ اول ضابطه تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = a + \cos\left(-\frac{\pi}{4} + b\pi x\right) = a + \sin(b\pi x)$$

با توجه به نمودار $f(0) = 1$ است. $f(0) = a + \sin(0) = a + 0 = a = 1$

به نمودار نگاه کنید. دوره تناوب برابر ۶ است.



$$\frac{2\pi}{|b\pi|} = 6 \Rightarrow \frac{2}{|b|} = 6 \Rightarrow |b| = \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

اگر $b > 0$ باشد، نمودار بعد از $x=0$ باید این شکلی باشد؛ در حالی که نمودار الان این شکلی است.

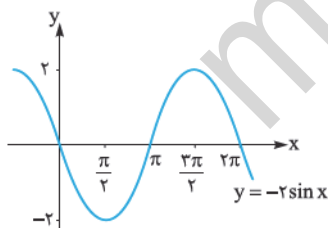
پس $f(x) = 1 + \sin\left(-\frac{\pi}{3}x\right)$ است.

$$f(29) = 1 + \sin\left(-\frac{29\pi}{3}\right) = 1 - \sin\left(\frac{29\pi}{3}\right) = 1 - \sin\left(\frac{30\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 1 - \sin\left(10\pi - \frac{\pi}{3}\right) = 1 - \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 1 + \sin \frac{\pi}{3} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

این تست را دوست خوبم مهدی ملازمضانی عزیز طراحی کرده بود که مشابه تست کنکور ۹۳ است. جا دارد که به خاطر این تست قشنگ از او تشکر کنیم.

۹- گزینه ۳ اول نمودار $y = 1 - 2\sin x$ را می‌کشیم:



سپس نمودار $y = 1 - 2\sin x$ را

رسم می‌کنیم. برای این کار نمودار

قبلی را ۱ واحد بالا می‌بریم:

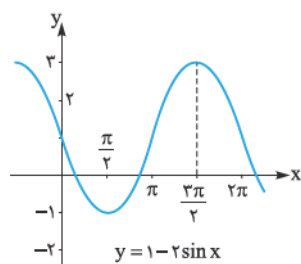
مطابق شکل، در $x = \frac{3\pi}{2}$ تابع

بیشترین مقدار را دارد.

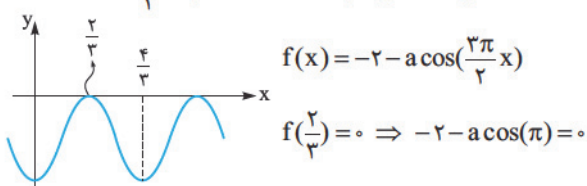
$$y = 1 - 2\sin x$$

برای رسم $y = 1 - 2\sin 2x$ طول نقاط را باید $\frac{1}{2}$ برابر کنیم. پس این نقطه

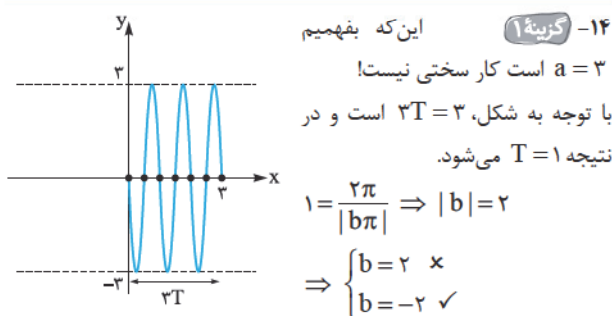
روی $\frac{3\pi}{4}$ قرار دارد.



۲) با توجه به تفران نمودار می‌توان فهمید که مقدار آن در $x = \frac{2}{3}$ صفر است.



$$\Rightarrow -2 + a = 0 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow a \times b = 2 \times \frac{3}{4} = 3$$



نمودار اول پایین رفته، پس $b = -2$ قابل قبول است.

بنابراین $ab = 3(-2) = -6$ می‌شود.

تذکر یک جواب دیگر سؤال، $a = -3$ و $b = 2$ است.

۱۵- گزینه ۳ می‌دانیم $a > 0$ است؛ در غیر این صورت نمودار تابع بعد



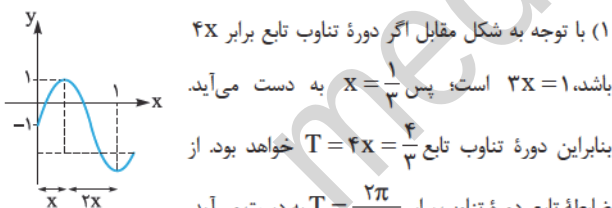
$$-1 \leq \sin(b\pi x) \leq 1 \xrightarrow{\times a} -a \leq a \sin(b\pi x) \leq a$$

$$\xrightarrow{-1} -a - 1 \leq a \sin(b\pi x) - 1 \leq a - 1$$

بیشترین مقدار تابع $a - 1$ است که با توجه به شکل برابر ۱ می‌باشد؛ پس

$a = 2$ می‌شود. تابع به صورت $y = 2 \sin(b\pi x) - 1$ است.

برای پیدا کردن b ، تا راه حل داریم:



$$\frac{2\pi}{|b|} = \frac{4}{3} \Rightarrow |b| = \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{3}{2} \\ b = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

(۲) کم‌ترین مقدار تابع $y = 2 \sin(b\pi x) - 1$ وقتی رخ می‌دهد که $\sin(b\pi x)$

برابر -1 باشد؛ یعنی عبارت داخل آن $\frac{3\pi}{4}$ شود؛ پس در $x = 1$ عبارت داخل

$$b\pi(1) = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow b = \frac{3}{4}$$

سینوس باید $\frac{3\pi}{4}$ باشد؛

$$\text{بنابراین } a + b = \frac{3}{4} + 2 = \frac{11}{4}$$

تذکر یک جواب دیگر سؤال، $b = -\frac{3}{4}$ و $a = -2$ است.

۱۰- گزینه ۱ تابع وقتی $\max$ می‌شود که $\sin \pi x = 1$ باشد؛ پس

α را باید طوری انتخاب کنیم که عبارت داخل سینوس برابر $\frac{\pi}{4}$ باشد؛ در

نتیجه $\alpha = \frac{1}{4}$ است.

به علاوه می‌توانید نمودار $y = 2 \sin \pi x - 1$ را بکشید و مقدار α را پیدا کنید.

۱۱- گزینه ۴ دوره تناوب تابع برابر $T = \frac{2\pi}{3}$ است:

$$T = \frac{2\pi}{|m|} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow |m| = 3 \Rightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = -3 \end{cases}$$

توجه کنید که $-\sin mx$ را باید ۱ واحد بالا ببریم تا به نمودار داده‌شده

برسیم. اگر $m > 0$ باشد، $-\sin mx$ بعد صفر این شکلی و اگر

$m < 0$ باشد $\sin mx$ است؛ پس $m > 0$ است.

$$y = 1 - \sin 3x \Rightarrow y\left(\frac{2\pi}{6}\right) = 1 - \sin\left(3 \times \frac{2\pi}{6}\right) = 1 - \sin(\pi)$$

$$= 1 - \sin(2\pi - \frac{\pi}{2}) = 1 - \sin(-\frac{\pi}{2}) = 1 + \sin \frac{\pi}{2} = 1 + 1 = 2$$

۱۲- گزینه ۳ دوره تناوب تابع، π است.

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = 2 \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ b = -2 \end{cases}$$

ماکزیم تابع $1/5$ است؛ پس: $1 + |a| = \frac{3}{5} \Rightarrow |a| = \frac{1}{5} \Rightarrow a = \pm \frac{1}{5}$

مقدار تابع در $x = 0$ عددی بین ۱ و $1/5$ است:

$$y(0) = 1 + a \sin(-\frac{\pi}{6}) = 1 - \frac{1}{2}a > 1 \Rightarrow \frac{1}{2}a < 0 \Rightarrow a < 0$$

بنابراین $a = -\frac{1}{2}$ است. با توجه به گزینه‌ها فقط $b = 2$ می‌تواند باشد. البته

اگر $b < 0$ بود، نمودار تابع بعد صفر این شکلی می‌شد!

$$a + b = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

۱۳- گزینه ۳ اول ضابطه تابع را ساده می‌کنیم.

$$f(x) = -2 + a \cos(\pi + b\pi x) = -2 - a \cos b\pi x$$

دوره تناوب تابع $\frac{4}{3}$ است.

$$\frac{2\pi}{|b|} = \frac{4}{3} \Rightarrow |b| = \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{3}{2} \\ b = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$\cos\left(-\frac{2\pi}{3}x\right)$ با $\cos\left(\frac{2\pi}{3}x\right)$ برابر است؛ پس هر دو مقدار برای b قابل

قبول است.

برای پیدا کردن a ، تا راه داریم:

(۱) بیشترین مقدار تابع با توجه به نمودار صفر است.

می‌دانیم $1 - \cos(b\pi x) \leq 1$ می‌باشد.

چون $a > 0$ است، داریم:

$$-a \leq -a \cos(b\pi x) \leq a$$

$$\xrightarrow{-2} -2 - a \leq -2 - a \cos(b\pi x) \leq a - 2$$

بیشترین مقدار، $a - 2$ است که باید صفر باشد؛ پس $a = 2$ می‌شود.

۱۶- گزینه ۱

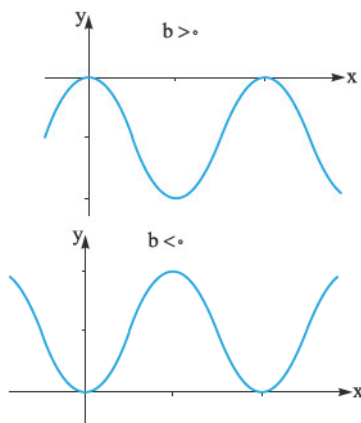
مقدار تابع در $x = 0$ برابر صفر است؛ یعنی:

$$y(0) = a + b \cos(0) = a + b = 0 \Rightarrow a = -b$$

بنابراین ضابطه تابع به صورت

$$y = -b + b \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)$$

نمودار را با شرط $b > 0$ و $b < 0$ رسم کرده‌ایم:



پس $b < 0$ است. در تابع $y = -b + b \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)$ بیشترین مقدار وقتی رخ

می‌دهد که $\cos \frac{\pi}{3}x = -1$ باشد:

$$\max(y) = -b + b(-1) = -2b = 4 \Rightarrow b = -2$$

۱۷- گزینه ۳

اولاً $a > 0$ است؛ چون

نمودار تابع بعد صفر شبیه $y = 1 + \sin x$ است

و شبیه $1 - \sin x$ نیست.

کم‌ترین مقدار تابع از روی نمودار برابر -1 است و وقتی رخ می‌دهد که در

عبارت $y = 1 + a \sin(b\pi x)$ $\sin(b\pi x) = -1$ باشد:

$$\min(y) = -1 = 1 + a(-1) \Rightarrow -a = -2 \Rightarrow a = 2$$

حالا برویم سراغ دوره تناوب. نمودار تابع در ۲ دوره از تناوبش رسم شده است

و سؤال گفته نمودار در فاصله $(0, \frac{4}{3})$ رسم شده؛ یعنی:

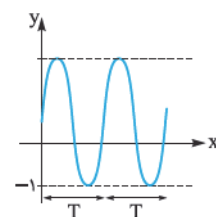
$$2T = \frac{4}{3} \Rightarrow T = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{2\pi}{|b\pi|} = \frac{2}{3} \Rightarrow |b| = 3 \Rightarrow \begin{cases} b = 3 \\ b = -3 \end{cases}$$

پس $a + b = 5$ می‌شود. البته یک

جواب هم این است که $a = -2$ و

$b = -3$ باشد که البته کنکور

اعتقادی به بررسی این حالت‌ها ندارد!



۱۸- گزینه ۲

با توجه به شکل، ضابطه این تابع به صورت

$$y = a \cos bx + c$$

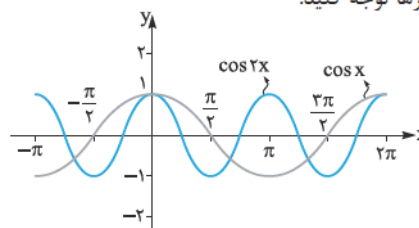
است که مقادیر ماکزیمم و مینیمم آن ۲ و -4 است

و دوره تناوب هم π می‌باشد؛ بنابراین $|a| = 3$ و $|b| = 2$ و $c = -1$ است.

ضابطه تابع به صورت روبه‌رو می‌شود:

$$y = -3 \cos(\pm 2x) - 1$$

حالا به نمودارها توجه کنید:

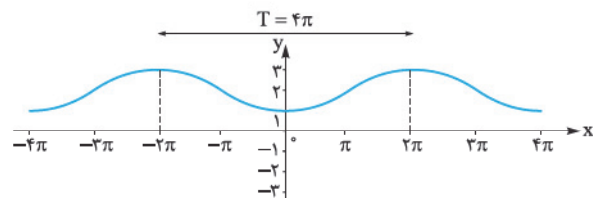


۱۹- گزینه ۱

نمودار شبیه $y = a \cos bx + c$ است.

$$|a| = \frac{\max - \min}{2} = \frac{3 - 1}{2} = 1 \quad c = \frac{\max + \min}{2} = \frac{3 + 1}{2} = 2$$

دوره تناوب تابع برابر 4π است؛ پس $b = \frac{1}{4}$ می‌شود.



به علاوه چون نمودار اطراف $x = 0$ این شکلی است: a باید منفی باشد:

$$y = 2 - \cos \frac{x}{4}$$

۲۰- گزینه ۲

طبق فرمول‌هایی که ارائه دادیم، داریم:

$$b = \frac{\max - \min}{2} = \frac{4}{2} = 2 \quad a = \frac{\max + \min}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$a + |b| = 5$$

دوره تناوب تابع $y = 6 - 3 \sin\left(\frac{2\pi}{3}x\right)$ برابر است با:

۲۱- گزینه ۲

$$T = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{3}} = 3$$

از طرفی $3 \leq -3 \sin\left(\frac{2\pi}{3}x\right) \leq 3$ است؛ در نتیجه:

$$3 \leq 6 - 3 \sin\left(\frac{2\pi}{3}x\right) \leq 9$$

و ماکزیمم تابع برابر ۹ و مینیمم آن برابر ۳ است.

۲۲- گزینه ۲

تابع $y = \cos x$ در بازه $[0, 2\pi]$ یک بار ماکزیمم مقدار

خود را تولید می‌کند. از طرفی دوره تناوب تابع $y = -2 \cos 3x$ برابر $\frac{2\pi}{3}$ است

و در نتیجه ۳ بار در بازه $[0, 2\pi]$ بیشترین مقدار خود را تولید می‌کند.

۲۳- گزینه ۴

دوره تناوب تابع $y = \cos \frac{x}{3}$ برابر است با: $T_1 = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$

و دوره تناوب تابع $y = 3 \sin 2x$ برابر است با: $T_2 = \frac{2\pi}{2} = \pi$ و در نتیجه داریم:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{6\pi}{\pi} = 6$$

۲۴- گزینه ۲

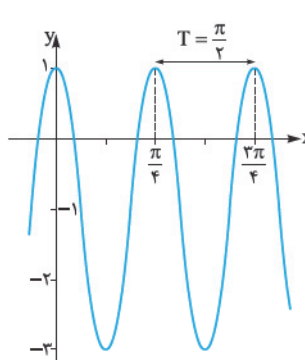
در بین گزینه‌ها، T قطعاً دوره تناوب نیست؛ چون

$f(x + T)$ با $f(x)$ برابر نیست. حالا $2T$ را آزمایش می‌کنیم:

$$f(x + 2T) = f((x + T) + T) = -f(x + T) = -(-f(x)) = f(x)$$

در نتیجه $2T$ دوره تناوب تابع f است.

۲۵- گزینه ۲ نمودار $f(x) = 2\cos bx - 1$ شبیه شکل زیر است:



اگر تابع در نقاط $x = \frac{\pi}{4}$ و $x = \frac{3\pi}{4}$ ماکزیمم شود، بنابراین دوره تناوب باید مضربی از فاصله آنها یعنی $\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ باشد. در بین گزینه‌ها فقط $x = \frac{\pi}{10}$ را داریم که $\frac{\pi}{2}$ مضربی از آن است.

۲۶- گزینه ۳ دوره تناوب تابع $T = 1$ است؛ پس اگر $k \in \mathbb{Z}$ باشد،

$$\begin{aligned} f(k(1) + x) &= f(x) \Rightarrow f(-3/76) = f(-4(1) + 0/24) \\ &= f(0/24) = \sqrt{0/24 + \frac{1}{4}} = \sqrt{0/24 + 0/25} = \sqrt{0/49} = 0/7 \end{aligned}$$

۲۷- گزینه ۲ نمودار متناوب با دوره تناوب ۴ است؛ پس اگر $k \in \mathbb{Z}$ باشد:

$$\begin{aligned} f(x + k(4)) &= f(x) \\ \text{می‌دانیم } 1395 &= 1392 + 3 = 348 \times 4 + 3 \\ f(1395) &= f(3) \end{aligned}$$

پس باید مقدار $f(3)$ را پیدا کنیم:

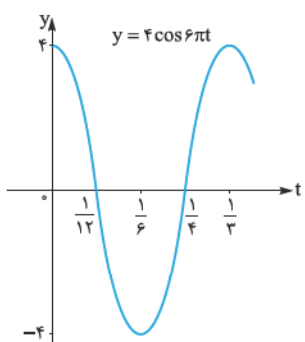
معادله خطی که $x = 3$ روی آن قرار می‌گیرد، برابر $y = -\frac{3}{4}(x - 4)$ است:

$$f(3) = -\frac{3}{4}(3 - 4) = \frac{3}{4}$$

پس:

۲۸- گزینه ۳ دوره تناوب حرکت وزنه $\frac{1}{3}$ ثانیه بوده است که برابر با

$$\frac{1}{3} = \frac{2\pi}{|\omega|} \Rightarrow |\omega| = 6\pi \Rightarrow \omega = 6\pi$$



با توجه به این که بیشترین فاصله وزنه از حالت تعادلش 4 cm است، پس $a = 4$ می‌شود. یعنی $y = 4\cos 6\pi t$ خواهد بود. این هم از نمودار: حاصل $\frac{\omega}{a} = \frac{6\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$ است.