



سَب امّحان حسابان ۲



■ امتحان نهایی ■

■ مشاوره ■

■ درسنامه ■

■ محمد جواد نوری ■

دوازدهم ریاضی

برای خرید این کتاب از مدابوک روی همین جمله کلیک کنید

ساختار کتاب

کتاب شب امتحان حسابان (۲) دوازدهم از ۴ قسمت اصلی به صورت زیر تشکیل شده است:

(۱) **آزمون‌های نوبت اول:** آزمون‌های شماره ۱ تا ۴ این کتاب مربوط به مباحث نوبت اول است که خودش به دو قسمت تقسیم می‌شود:

(الف) **آزمون‌های طبقه‌بندی‌شده:** آزمون‌های شماره ۱ و ۲ را فصل به فصل طبقه‌بندی کرده‌ایم. بنابراین شما به راحتی می‌توانید پس از خواندن هر فصل از درس‌نامه تعدادی سؤال را بررسی کنید. حواستان باشد این آزمون‌ها ۲۰ نمره‌ای و مثل یک آزمون کامل هستند. در کنار سؤال‌های این آزمون‌ها نکات مشاوره‌ای نوشته‌ایم. این نکات به شما در درس خواندن قبل از امتحان و پاسخگویی به آزمون در زمان امتحان کمک می‌کند.

(ب) **آزمون طبقه‌بندی‌نشده:** آزمون‌های شماره ۳ و ۴ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم تا دو آزمون نوبت اول، مشابه آزمون‌های که معلمان از شما خواهد گرفت، ببینید.

(۲) **آزمون‌های نوبت دوم:** آزمون‌های شماره ۵ تا ۱۲ امتحان‌های نهایی برگزار شده در سال‌های ۱۴۰۰ تا ۱۴۰۲ هستند. این قسمت هم، خودش به ۲ بخش تقسیم می‌شود:

(الف) **آزمون‌های طبقه‌بندی‌شده:** آزمون‌های شماره ۵ تا ۸ آزمون‌های نهایی خرداد و شهریور ۱۴۰۰، دی ۱۴۰۱ و دی ۱۴۰۱ هستند که طبقه‌بندی کرده‌ایم. با این کار باز هم می‌توانید پس از خواندن هر فصل تعدادی سؤال مرتبط را پاسخ دهید. هر کدام از این آزمون‌ها هم، ۲۰ نمره دارند. در واقع در این بخش، شما ۴ آزمون کامل را می‌بینید. این آزمون‌ها هم نکات مشاوره‌ای دارند.

(ب) **آزمون‌های طبقه‌بندی‌نشده:** آزمون‌های شماره ۹ تا ۱۲ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم؛ پس، در این بخش با ۴ آزمون نوبت دوم، مشابه آزمون پایان سال معلمان مواجه خواهید شد. این آزمون‌ها به ترتیب امتحان‌های نهایی خرداد ۱۴۰۱ و خرداد ۱۴۰۲، شهریور ۱۴۰۱ و شهریور ۱۴۰۲ هستند.

(۳) **پاسخ‌نامه تشریحی آزمون‌ها:** در پاسخ تشریحی آزمون‌ها تمام آن‌چه را که شما باید در امتحان بنویسید تا نمره کامل کسب کنید، برایتان نوشته‌ایم.

(۴) **درس‌نامه کامل شب امتحانی:** این قسمت برگ برنده شما نسبت به کسانی است که این کتاب را نمی‌خوانند! در این قسمت تمام آن‌چه را که شما برای گرفتن نمره عالی در امتحان حسابان (۲) نیاز دارید، تنها در ۱۵ صفحه آورده‌ایم، بخوانید و لذتش را ببرید!

یک راهکار: موقع امتحان‌های نوبت اول می‌توانید از سؤال‌های فصل‌های اول تا سوم آزمون‌های ۵ تا ۸ هم استفاده کنید.

فهرست

بازمبندی درس حسابان (۲)

فصل‌ها	پایانی نوبت اول	پایانی نوبت دوم	شهریور و دی
اول	۷	۳	۳/۵
دوم	۶	۳	۳
سوم	۷	۳	۳
چهارم	—	۶	۶
پنجم		۵	۴/۵
جمع	۲۰	۲۰	۲۰

صفحه
نوبت آزمون پاسخ‌نامه

آزمون شماره ۱	(طبقه‌بندی‌شده)	اول	۳	۲۲
آزمون شماره ۲	(طبقه‌بندی‌شده)	اول	۵	۲۴
آزمون شماره ۳	(طبقه‌بندی‌نشده)	اول	۶	۲۵
آزمون شماره ۴	(طبقه‌بندی‌نشده)	اول	۷	۲۷
آزمون شماره ۵	(طبقه‌بندی‌شده) نهایی خرداد ۱۴۰۰	دوم	۸	۲۹
آزمون شماره ۶	(طبقه‌بندی‌شده) نهایی شهریور ۱۴۰۰	دوم	۱۰	۳۰
آزمون شماره ۷	(طبقه‌بندی‌شده) نهایی دی ۱۴۰۰	دوم	۱۲	۳۲
آزمون شماره ۸	(طبقه‌بندی‌شده) نهایی دی ۱۴۰۱	دوم	۱۳	۳۳
آزمون شماره ۹	(طبقه‌بندی‌نشده) نهایی خرداد ۱۴۰۱	دوم	۱۵	۳۵
آزمون شماره ۱۰	(طبقه‌بندی‌نشده) نهایی خرداد ۱۴۰۲	دوم	۱۷	۳۶
آزمون شماره ۱۱	(طبقه‌بندی‌نشده) نهایی شهریور ۱۴۰۱	دوم	۱۸	۳۷
آزمون شماره ۱۲	(طبقه‌بندی‌نشده) نهایی شهریور ۱۴۰۲	دوم	۲۰	۳۸

۴۰

درس‌نامه توپ برای شب امتحان

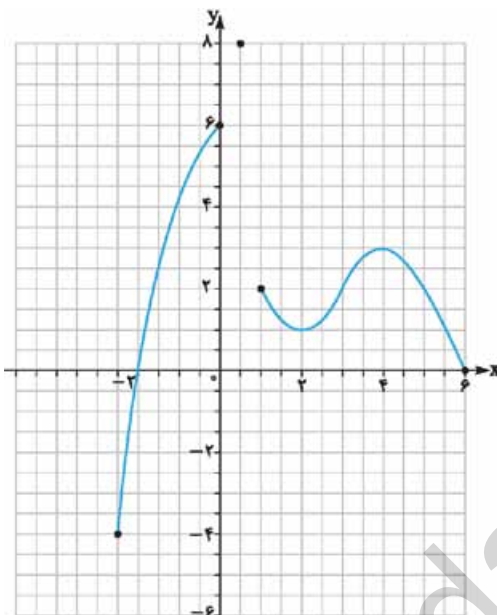
برای خرید این کتاب از مدابوک روی همین جمله کلیک کنید

حسابان (۲)	رشته: ریاضی فیزیک	مدت آزمون: ۱۰۰ دقیقه	kheilisabz.com	شماره
ردیف	آزمون شماره ۱			نمره
۱۰	فصل سوم			
	حدود زیر را محاسبه کنید.			
	سؤال هدگیری همیشه در امتحانات مطرح می شود. تکنیک های هدگیری را از درس نهمه بفون.			
	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3x^2+1}}{2x-3} \quad \text{پ) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x \quad \text{ب) } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\pi-4}{x^2-3x+2} \quad \text{الف)}$			
۱۱	$f(x) = \frac{x+1}{x^2+x-6}$ را به دست آورید.			
	مجانباتی قائم تابع			
۱۲	مجانباتی افقی تابع روبه‌رو را بیابید.			
	$y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ به $\sqrt{x^2}$ توجه کن.			
۱۳	نمودار تابعی مانند f را طوری رسم کنید که:			
	الف) $f(-1) = f(2) = 0$ ب) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$ پ) خط $y = 1$ مجانب افقی آن باشد.			
۲۰	موفق باشید			
جمع نمرات				

برای خرید این کتاب آزمون‌ها براساس دبیران و معلمان شهرهای مختلف تهیه شده است

شماره	kheilisabz.com	زمان آزمون: ۱۲۰ دقیقه	رشته: ریاضی فیزیک	حسابان (۲)
ردیف	آزمون شماره ۹		نوبت دوم پایه دوازدهم - نهایی خرداد ۱۴۰۱	
۱	درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را تعیین کنید. الف) اگر تابع f در $x = a$ پیوسته باشد و در این نقطه مشتق چپ و راست نامتناهی باشد، آن گاه $f'(a)$ وجود ندارد. ب) هر نقطه بحرانی تابع $f(x)$ ، یک نقطه اکسترمم نسبی تابع $f(x)$ است.			
۲	جاهای خالی را با عدد یا کلمه مناسب کامل کنید. الف) دوره تناوب تابع $y = 7 \sin(\frac{-\pi}{4}x) + 2$ برابر است. ب) اگر برای هر x در بازه I ، $f''(x) > 0$ ، آن گاه نمودار $f(x)$ در این بازه تقعر رو به دارد.			
۳	نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $g(x) = f(x-1)$ را رسم کرده و دامنه تابع g را تعیین کنید.			
۴	ابتدا نمودار تابع $f(x) = x^2 + 2x$ را رسم نمایید، سپس تعیین کنید که این تابع در چه بازه‌ای اکیداً صعودی و در چه بازه‌ای اکیداً نزولی است.			
۵	باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $p(x) = 8x^3 - 4x^2 + 2$ را بر $2x + 1$ به دست آورید.			
۶	اگر $\frac{1}{64} \leq (\frac{1}{4})^{3x-2} < \frac{1}{4}$ ، حدود x را به دست آورید.			
۷	معادله مثلثاتی $\sin 2x - \cos x = 0$ را حل کنید.			
۸	نمودار مقابل مربوط به تابعی با ضابطه $f(x) = a \cos bx + c$ است. a ، b و c را مشخص کنید.			
۹	حدود توابع زیر را در صورت وجود بیابید. الف) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{(x-2)^2}$ ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - x^3}{2x - 1}$ پ) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \sin^2 x}{x^2}$			
۱۰	مجانبات قائم و افقی منحنی تابع $f(x) = \frac{1-x^2}{x^2+x}$ را در صورت وجود بیابید.			
۱۱	مشتق پذیری تابع $f(x) = 2x - 4 $ را در $x = 2$ بررسی کنید.			

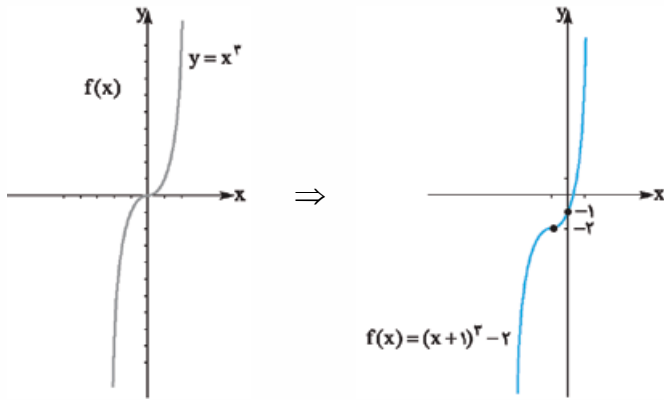
برای خرید این کتاب از مدابوک روی همین جمله کلیک کنید

ردیف	آزمون شماره ۹	رشته: ریاضی فیزیک	زمان آزمون: ۱۲۰ دقیقه	kheilisabz.com	نمره
				نوبت دوم پایه دوازدهم - نهایی خرداد ۱۴۰۱	
۱۲	برای تابع $f(x) = x^3 - 8$ در نقطه تقاطع آن با محور x ها معادله خط مماس را بنویسید.				۱/۵
۱۳	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.) الف) $f(x) = (-3x^2 + x)^5(2x)$ ب) $g(x) = 5 \tan x + \sin x^2$				۱/۷۵
۱۴	اگر سرعت متوسط یک متحرک در یک بازه برابر ۲ متر بر ثانیه باشد و معادله حرکت متحرک به صورت $f(t) = t^3 - t$ بر حسب متر باشد، در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای متحرک برابر سرعت متوسط آن است؟				۰/۷۵
۱۵	اگر نقطه $A(-1, 1)$ نقطه عطف تابع با ضابطه $f(x) = ax^3 + bx^2 + 2$ باشد، مقادیر a و b را به دست آورید.				۱/۲۵
۱۶	با توجه به نمودار داده شده، به سؤالات زیر پاسخ دهید: الف) مقدار ماکزیمم مطلق را بنویسید. ب) مقدار مینیمم مطلق را بنویسید. پ) طول نقطه ماکزیمم نسبی را بنویسید. ت) طول نقطه مینیمم نسبی را بنویسید.				۱
					
۱۷	جدول رفتار و نمودار تابع $y = \frac{2x-1}{x-2}$ را رسم کنید.				۱/۷۵
	موفق باشید			جمع نمرات	۲۰

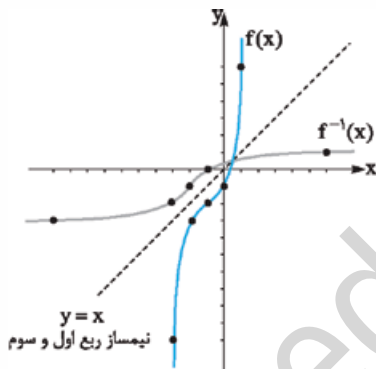
پاسخ‌نامه تشریحی

آزمون شماره ۱ (نوبت اول)

۳- الف) ابتدا نمودار $y = x^3$ را رسم می‌کنیم. سپس نمودار $y = x^3$ را یک واحد به سمت چپ و دو واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم.



ب) چون هر خط موازی محور x ها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند، پس تابع یک‌به‌یک است، بنابراین تابع f وارون‌پذیر است. برای رسم وارون f ، باید نمودار $f(x) = (x+1)^3 - 2$ را نسبت به خط نیمساز ربع اول و سوم قرینه کنیم:



پ) برای محاسبه ضابطه وارون تابع $f(x) = (x+1)^3 - 2$ ابتدا باید x را تنها کنیم:

$$y = (x+1)^3 - 2 \Rightarrow y+2 = (x+1)^3 \Rightarrow x+1 = \sqrt[3]{y+2} \Rightarrow x = \sqrt[3]{y+2} - 1$$

جای x و y را عوض می‌کنیم $\rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+2} - 1$

۴- طبق نمودار از سمت چپ شروع می‌کنیم.

اکیداً صعودی: $[-4, 0]$ ، اکیداً نزولی: $(-\infty, -4)$

اکیداً نزولی: $[4, +\infty)$ ، تابع ثابت: $[0, 4]$

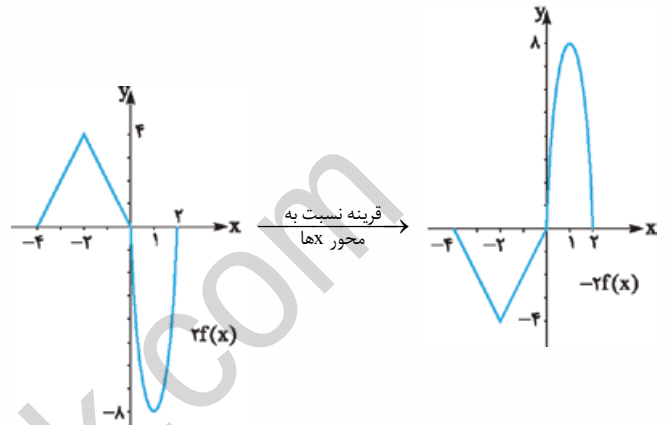
۵- باید نشان دهیم مقدار $f(x)$ به ازای ریشه $5-2x$ ، برابر صفر است؛ یعنی باید نشان دهیم: $f(\frac{5}{2}) = 0$.

$$f(\frac{5}{2}) = 2(\frac{5}{2})^3 - 3(\frac{5}{2})^2 - 9(\frac{5}{2}) + 10$$

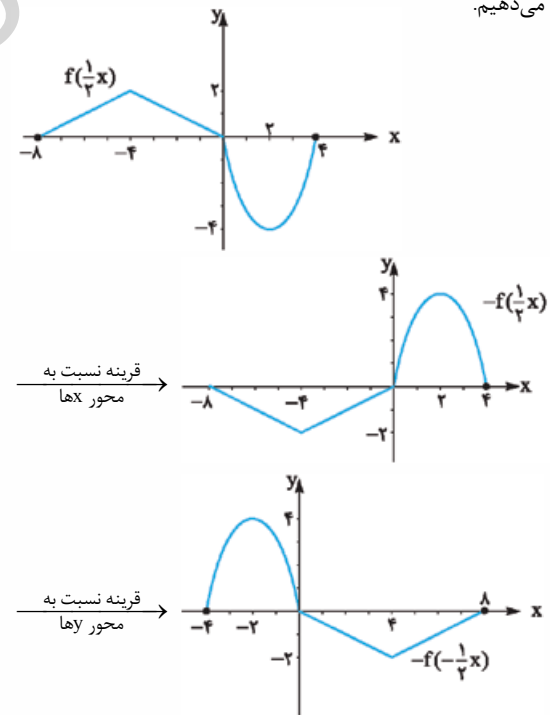
$$= \cancel{2} \times \frac{125}{\cancel{2}} - 3 \times \frac{25}{4} - \frac{45}{2} + 10 = \frac{125 - 75 - 90 + 40}{4}$$

$$= \frac{165 - 165}{4} = 0 \Rightarrow f(\frac{5}{2}) = 0$$

۱- برای رسم نمودار $y_1 = -2f(x)$ ابتدا با توجه به ضریب ۲، یک انبساط عمودی در راستای محور y ها انجام می‌دهیم؛ سپس به علت ضریب منفی نمودار را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.



برای رسم $y_2 = -f(\frac{1}{4}x)$ ابتدا با توجه به ضریب $\frac{1}{4}$ ، یک انبساط افقی در راستای محور x ها انجام می‌دهیم. سپس یک‌بار قرینه نسبت به محور x ها و بار دیگر قرینه نسبت به محور y ها انجام می‌دهیم.



۲- الف) $(-2, \frac{1}{4})$

$A = (-1, 1)$ $\xrightarrow[\text{به سمت چپ}]{\text{x یک واحد}} A' = (-2, 1)$

$\xrightarrow[\text{عمودی با ضریب } \frac{1}{4}]{\text{yها انقباض}} A'' = (-2, \frac{1}{4})$

$$-1 \leq x - 1 \leq 4 \Rightarrow 0 \leq x \leq 5 \Rightarrow [0, 5]$$

ب)

برای خرید این کتاب از مدابوک روی همین جمله کلیک کنید

۹- مساحت مثلث به کمک دو ضلع و زاویه بین آنها عبارت است از:

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{1}{2} \times \text{ضلع} \times \text{ضلع} \times \sin(\text{زاویه بین دو ضلع})$$

$$8 = \frac{1}{2} \times 4 \times 8 \times \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{1}{2}$$

زاویه بین دو ضلع در مثلث در بازه $0 < \theta < \pi$ قرار می‌گیرد، پس $\theta = \frac{\pi}{6}$ و $\theta = \frac{5\pi}{6}$ قابل قبول هستند. یعنی دو مثلث با این خاصیت وجود دارد.

۱۰- الف) صورت کسر فاقد X است. $X = 1$ را فقط در مخرج کسر جای گذاری می‌کنیم:

$$X^2 - 3X + 2 = 0 \Rightarrow X = 1, 2$$

با تعیین علامت مخرج کسر داریم:

X	۱	۲
$X^2 - 3X + 2$	+	-

$X \rightarrow 1^+$ یعنی حد راست، طبق جدول برای همسایگی راست $X = 1$ ، مقدار

$$\lim_{X \rightarrow 1^+} \frac{X^2 - 3X + 2}{X^2 - 3X + 2} = \frac{0}{0} \text{ منفی است. در نتیجه خواهیم داشت:}$$

$$\lim_{X \rightarrow 1^+} \frac{X^2 - 3X + 2}{X^2 - 3X + 2} = +\infty$$

اما $0 < \pi - 4 < \pi$ ، بنابراین:

(ب) از مثلثات به یاد داریم که:

$$\begin{cases} \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \\ \sin(\frac{\pi}{2}) = 1, \cos(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$$

پس حاصل $\lim_{X \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x$ به صورت $\frac{1}{0}$ خواهد بود که باید $+$ یا $-$ بودن مخرج را مشخص کنیم. طبق صورت سؤال، $X \rightarrow \frac{\pi}{2}^+$ ، پس با مقادیر بیشتر از $\frac{\pi}{2}$ به $\frac{\pi}{2}$ نزدیک می‌شویم، لذا در ربع دوم دایره مثلثاتی هستیم و در این ربع مقدار $\cos X$ منفی است.

در نتیجه:

$$\lim_{X \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

(پ) برای عبارت زیر رادیکال داریم:

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{3X^2 + 1} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{3X^2} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{3} |X|$$

چون $X \rightarrow +\infty$ میل می‌کند، پس داخل قدرمطلق مثبت است و می‌توان قدرمطلق را حذف کرد. در نتیجه:

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{3} |X| = \lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{3} X$$

$$\Rightarrow \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3}X}{2X - 3} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3}X}{2X} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

۱۱- مخرج کسر را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$X^2 + X - 6 = 0 \Rightarrow (X + 3)(X - 2) = 0 \Rightarrow X = -3, X = 2$$

چون $X = 2$ و $X = -3$ صورت کسر را صفر نمی‌کنند، حتماً مجانب قائم هستند. برای بررسی دقیق‌تر ابتدا مخرج را تعیین علامت می‌کنیم:

X	-3	2
$X^2 + X - 6$	+	-

طبق جدول در همسایگی راست $X = 2$ ، مخرج مثبت است.

$$\lim_{X \rightarrow (2)^+} \frac{X + 1}{X^2 + X - 6} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

در نتیجه:

$$\lim_{X \rightarrow (2)^-} \frac{X + 1}{X^2 + X - 6} = \frac{3}{0^-} = -\infty$$

در نتیجه:

$$\lim_{X \rightarrow (-3)^+} \frac{X + 1}{X^2 + X - 6} = \frac{-2}{0^+} = +\infty$$

در نتیجه:

$$\lim_{X \rightarrow (-3)^-} \frac{X + 1}{X^2 + X - 6} = \frac{-2}{0^-} = -\infty$$

در نتیجه:

پس $2X - 5$ یک مقسوم‌علیه $f(X)$ است. برای پیدا کردن مقسوم‌علیه‌های دیگر باید

$f(X)$ را بر $2X - 5$ تقسیم کنیم.

$$\begin{array}{r} 2X^2 - 3X^2 - 9X + 10 \quad | \quad 2X - 5 \\ -(2X^2 - 5X^2) \\ \hline 2X^2 - 9X + 10 \\ -(2X^2 - 5X) \\ \hline -4X + 10 \\ -(-4X + 10) \\ \hline 0 \end{array}$$

بنابراین: $f(X) = (2X - 5)(X^2 + X - 2) = (2X - 5)(X + 2)(X - 1)$

یعنی $X + 2$ و $X - 1$ مقسوم‌علیه‌های دیگر $f(X)$ هستند.

۶- به طور کلی دوره تناوب تناوب توابعی به فرم $y = a \sin(bx + c) + d$ و

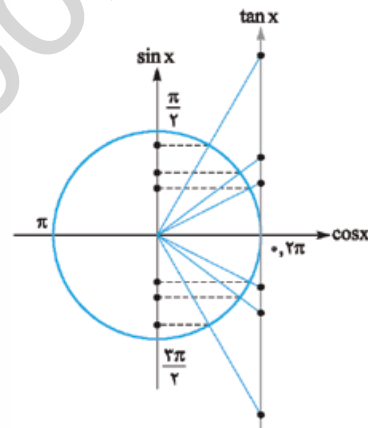
$y = a \cos(bx + c) + d$ برابر $\frac{2\pi}{|b|}$ و مقدار ماکزیمم $|a| + d$ و مقدار مینیمم $-|a| + d$ است.

(الف)

(ب)

$$\begin{cases} y = -2\sin 5x + 3 \\ T = \frac{2\pi}{|5|} = \frac{2\pi}{5} \\ \max = |-2| + 3 = 2 + 3 = 5 \\ \min = -|-2| + 3 = -2 + 3 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -\cos \frac{\pi}{3}x + \sqrt{2} \\ T = \frac{2\pi}{|\frac{\pi}{3}|} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6 \\ \max = |-1| + \sqrt{2} = 1 + \sqrt{2} \\ \min = -|-1| + \sqrt{2} = -1 + \sqrt{2} \end{cases}$$

۷- دایره مثلثاتی رسم می‌کنیم:



در ربع اول: $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ، طبق شکل

مشخص است که همواره:

$$\sin \alpha < \tan \alpha$$

در ربع چهارم: $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ ، طبق

شکل مشخص است که همواره:

$$\sin \alpha > \tan \alpha$$

۸- الف) $2\sin x + \sqrt{3} = 0$ ، در نتیجه $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. زاویه‌ای که مقدار سینوس

آن $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ است را از ربع ۴ انتخاب می‌کنیم. $\alpha = -\frac{\pi}{3}$.

جواب‌های کلی عبارت‌اند از:

$$\begin{cases} x = 2k\pi + (-\frac{\pi}{3}) \\ x = (2k+1)\pi - (-\frac{\pi}{3}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{3} \\ x = 2k\pi + \frac{4\pi}{3} \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$$

(ب) قرار می‌دهیم $\tan x = t$ ، در این صورت: $2t^2 - 3t + 1 = 0$.

مجموع ضرایب برابر صفر است، پس $t = 1$ و $t = \frac{1}{2}$ در نتیجه:

$$\tan x = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

اما از معادله $\tan x = \frac{1}{2}$ مقدار زاویه قابل محاسبه نیست. مثلاً اگر β زاویه موردنظر

باشد، آن‌گاه $\tan \beta = \frac{1}{2}$ و در نتیجه:

$$x = k\pi + \beta, k \in \mathbb{Z}$$

برای خرید این کتاب از مدابوک روی همین جمله کلیک کنید

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{x^2} \quad ۱۲- \text{توجه داریم که:}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} |x| = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) \end{cases}$$

اکنون حد تابع داده شده را یک بار وقتی $x \rightarrow +\infty$ و بار دیگر وقتی $x \rightarrow -\infty$ میل

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1 \quad \text{می کند، محاسبه می کنیم:}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-x} = -1$$

پس $y = \pm 1$ خطوط مجانب افقی تابع هستند.

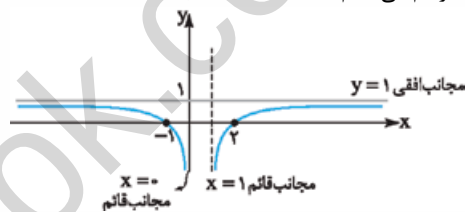
۱۳- طبق (الف)، نقاط $(2, 0)$ و $(-1, 0)$ روی نمودار است؛ یعنی نمودار باید محور x ها را در -1 و 2 قطع کند.

طبق (ب)، خطوط $x = 1$ و $x = 0$ مجانب های قائم هستند. برای مجانب قائم $x = 1$ ، در همسایگی راست، مقادیر f به $-\infty$ و برای مجانب قائم $x = 0$ ، در همسایگی چپ، مقادیر f به $-\infty$ میل می کند.

طبق (پ)، خط $y = 1$ مجانب افقی تابع f است، یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \quad \text{یا} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$$

اکنون نموداری با این اطلاعات رسم می کنیم:



برای خرید این کتاب از مدابوک روی همین جمله کلیک کنید

آزمون شماره ۹ (نوبت دوم)

$$f(x) = \frac{1-x^2}{x^2+x} \quad -10$$

$$x^2+x=0 \Rightarrow x(x+1)=0 \Rightarrow x=0, x=-1$$

مجاانب‌های قائم:

اما $x=-1$ ، مجانب قائم نیست، زیرا:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1-x^2}{x^2+x} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(1-x)(1+x)}{x(x+1)} = -2$$

می‌دانیم برای مجانب قائم بودن جواب، حد باید بی‌نهایت شود، نه عدد.

اما $x=0$ مجانب قائم است، زیرا:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-x^2}{x^2+x} = \frac{1}{0^+} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1-x^2}{x^2+x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1-x^2}{x^2+x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x^2}{x^2} = -1 \Rightarrow y = -1$$

مجاانب افقی:

۱۱- اولاً تابع $f(x) = |2x-4|$ در $x=2$ پیوسته است.

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x-4-0}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2(x-2)}{x-2} = 2$$

ثانیاً:

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(2x-4)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-2(x-2)}{x-2} = -2$$

چون $f'_+(2) \neq f'_-(2)$ پس تابع $f(x)$ در $x=2$ مشتق‌پذیر نیست.

$x=2$ برای تابع f طول نقطه گوشه‌ای است.

۱۲- ابتدا محل برخورد f با محور x ها را محاسبه می‌کنیم:

$$y=0 \Rightarrow x^2-8=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow (2,0)$$

محل تقاطع با محور x ها: $(2,0)$

برای محاسبه شیب خط مماس از مشتق‌گیری استفاده می‌کنیم:

$$f'(x) = 2x^2 \stackrel{x=2}{=} 2(2)^2 = 12 \Rightarrow m = 12$$

$$y-0 = 12(x-2) \Rightarrow y = 12x - 24$$

معادله خط مماس:

$$f'(x) = 5(-3x^2+x)^4 (-6x+1)(2x)+2(-3x^2+x)^5 \quad -13$$

$$g'(x) = 5(1+\tan^2 x) + (2x)\cos x^2 \quad -14$$

$$\text{سرعت متوسط} = 2$$

$$\text{سرعت لحظه‌ای} = f'(t) = 3t^2 - 1$$

$$3t^2 - 1 = 2 \Rightarrow t = 1$$

طبق فرض، سرعت متوسط برابر سرعت لحظه‌ای است.

$$A(-1,1) \quad \begin{cases} f(-1)=1 \\ f''(-1)=0 \end{cases} \quad -15$$

$$f(x) = ax^2 + bx^2 + 2 \quad f'(x) = 2ax^2 + 2bx$$

$$f''(x) = 4ax + 2b \quad f(-1) = -a + b + 2 = 1 \Rightarrow -a + b = -1$$

$$f''(-1) = -4a + 2b = 0$$

$$\begin{cases} -4a + 2b = 0 \\ -a + b = -1 \end{cases} \Rightarrow -4a + 2b = 0 \Rightarrow -4a + 2(-a+1) = 0 \Rightarrow -4a - 2a + 2 = 0 \Rightarrow -6a = -2 \Rightarrow a = \frac{1}{3}, b = -\frac{4}{3}$$

$$x=2 \quad (ب) \quad x=4 \quad (پ) \quad x=2 \quad (ت) \quad -16$$

توجه کنید که نقاط ابتدایی و انتهایی نمودار نمی‌توانند طول اکستریم‌های نسبی باشند.

$$y = \frac{2x-1}{x-2} \quad -17$$

$$x-2=0 \Rightarrow x=2$$

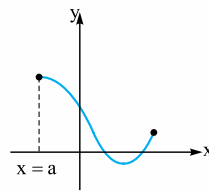
مجاانب قائم:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-1}{x-2} = 2 \Rightarrow y=2$$

مجاانب افقی:

$$y' = \frac{2(x-2)-1(2x-1)}{(x-2)^2} = \frac{-3}{(x-2)^2} < 0$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'	$-$	$ $	$-$
y	2	$\searrow$	2
	$-\infty$	$+$	$+\infty$

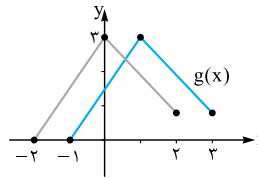


۱- الف) درست

ب) نادرست، در نمودار مقابل $x=a$ طول نقطه بحرانی است، ولی نقطه اکستریم نسبی نیست. (نقاط ابتدایی و انتهایی بازه هیچ‌گاه نقاط اکستریم نسبی نیستند.)

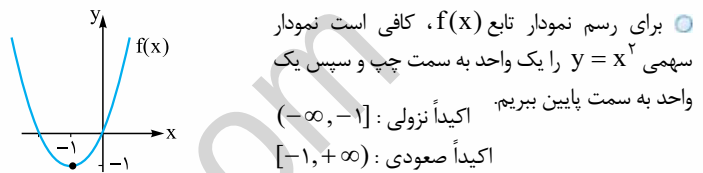
$$y = 7 \sin\left(-\frac{\pi}{2}x\right) + 2 \Rightarrow b = -\frac{\pi}{2}, T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4 \quad -2 \quad \text{الف)}$$

ب) بالا



۳- با توجه به ضابطه $g(x) = f(x-1)$ کافی است نمودار اولیه را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم. و با توجه به نمودار g ، دامنه آن برابر است با $[-1, 3]$.

$$f(x) = x^2 + 2x = x^2 + 2x + 1 - 1 = (x+1)^2 - 1 \quad -4$$



برای رسم نمودار تابع $f(x)$ ، کافی است نمودار سهمی $y = x^2$ را یک واحد به سمت چپ و سپس یک واحد به سمت پایین ببریم. اکیدا نزولی: $(-\infty, -1]$ اکیدا صعودی: $[-1, +\infty)$

۵- کافی است ریشه عبارت $2x+1$ را در $p(x)$ جای گذاری کنیم:

$$2x+1=0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$p\left(-\frac{1}{2}\right) = 8\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 4\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2 = 8\left(-\frac{1}{8}\right) - 4\left(\frac{1}{4}\right) + 2 = -1 - 1 + 2 = 0$$

$\Rightarrow$ باقی‌مانده $= 0$

۶- برای حل معادلات شامل عبارت‌های نمایی باید پایه‌ها را با هم برابر کنیم:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^6 \xrightarrow{y=\left(\frac{1}{2}\right)^x \text{ اکیدا نزولی است}} 2x-2 \geq 6 \Rightarrow x \geq \frac{8}{2}$$

۷- می‌دانیم $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

$$\sin 2x - \cos x = 0 \Rightarrow 2 \sin x \cos x - \cos x = 0$$

$$\Rightarrow \cos x (2 \sin x - 1) = 0 \Rightarrow \cos x = 0$$

$$2 \sin x - 1 = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow \cos \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\sin x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \quad \text{که } k \in \mathbb{Z} \text{ است.}$$

۸- با توجه به شکل $\max = 5$ ، $\min = 1$ و دوره تناوب برابر 4π است.

$$\begin{cases} |a| + c = 5 \\ -|a| + c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + c = 5 \\ -a + c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 3, |a| = 2 \\ T = \frac{2\pi}{|b|} = 4\pi \Rightarrow |b| = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = 2 \cos \frac{1}{2}x + 3 \quad \text{با توجه به شکل، } a > 0 \text{ پس } a = 2 \text{ و } b = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2-4}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+2}{x-2} = \frac{4}{0^+} = +\infty \quad -9$$

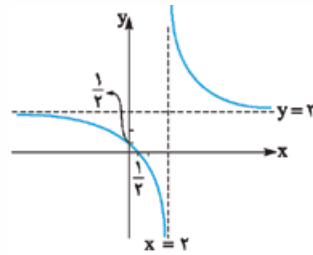
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-x^2}{2x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2}{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{می‌توان نوشت: } \frac{x + \sin^2 x}{x^2} = \frac{1}{x} + \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \sin^2 x}{x^2} = +\infty + 1 = +\infty$$

برای خرید این کتاب از مدابوک روی همین جمله کلیک کنید

محل تقاطع نمودار با محورها:

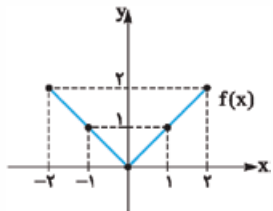


$$x = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{4} \Rightarrow (0, \frac{1}{4})$$

$$y = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4} \Rightarrow (\frac{1}{4}, 0)$$

درس نامهٔ توپ برای شب امتحان

مثال نمودار تابع $f(x) = |x|$ را با دامنهٔ $[-2, 2]$ رسم کنید و برد تابع را مشخص کنید. سپس نمودار توابع $g(x) = f(x-1)$ و $h(x) = f(x)-1$ را به کمک انتقال رسم کرده و دامنه و برد آن‌ها را بیابید.



$$f(x) = |x|$$

x	-2	-1	0	1	2
y	2	1	0	1	2

$$f \text{ برد } = [0, 2]$$

برای رسم تابع $g(x) = f(x-1)$ نمودار $f(x)$ را یک واحد به سمت راست در راستای افقی انتقال دهیم.

$$g \text{ دامنه } = [-1, 3]$$

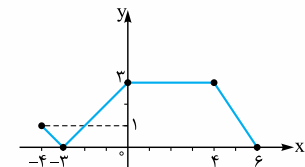
$$g \text{ برد } = f \text{ برد } = [0, 2]$$

برای رسم تابع $h(x) = f(x)-1$ نمودار $f(x)$ را یک واحد به سمت پایین در راستای قائم انتقال دهیم.

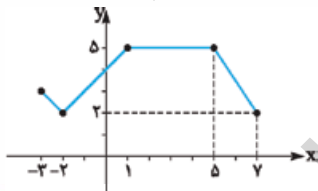
$$h \text{ دامنه } = f \text{ دامنه } = [-2, 2]$$

$$h \text{ برد } = [-1, 1]$$

مثال نمودار تابع f به صورت زیر داده شده است. با انتقال‌های افقی و عمودی نمودار تابع $y = f(x-1) + 2$ را رسم کنید.



پاسخ باید نمودار اولیه را دو واحد به سمت بالا در راستای قائم و یک واحد به سمت راست در راستای افقی انتقال دهیم.

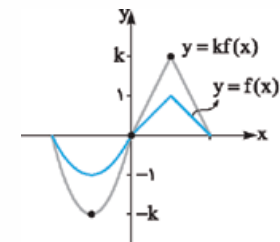


$$\text{دامنه جدید} = [-3, 7]$$

$$\text{برد جدید} = [2, 5]$$

انبساط و انقباض عمودی

برای رسم نمودار تابع $y = kf(x)$ ، باید عرض نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را در k ضرب کنیم.



اگر $k > 1$ باشد، نمودار انبساط عمودی در راستای محور y ‌ها و اگر $0 < k < 1$ باشد، نمودار انقباض عمودی در راستای محور y ‌ها دارد.

$$k > 1 \Rightarrow \text{انبساط عمودی داریم}$$

$$0 < k < 1 \Rightarrow \text{انقباض عمودی داریم}$$

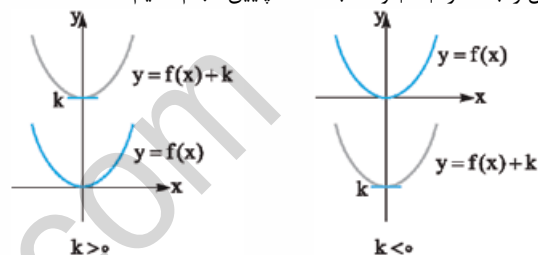
تذکره در حالتی که $k = -1$ باشد، نمودار تابع $y = -f(x)$ قرینهٔ نمودار تابع $y = f(x)$ نسبت به محور x ‌ها است.

فصل ۱: تابع

درس اول: تبدیل نمودار توابع

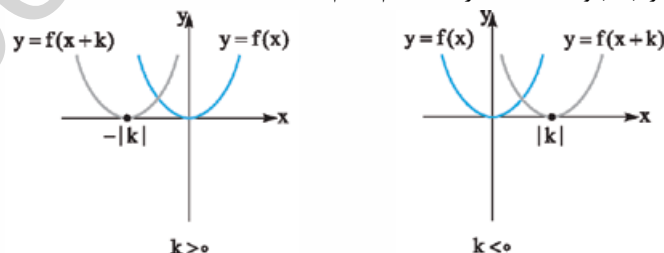
انتقال‌های عمودی و افقی

انتقال عمودی: برای رسم نمودار $y = f(x) + k$ ، اگر $k > 0$ باشد، باید نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در راستای قائم به سمت بالا ببریم. اما اگر $k < 0$ باشد، باید این انتقال را به اندازهٔ $|k|$ واحد به سمت پایین انجام دهیم.



تذکره در انتقال عمودی دامنهٔ تابع تغییری نمی‌کند و فقط بُرد آن به اندازهٔ k واحد تغییر می‌کند.

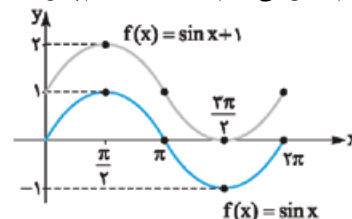
انتقال افقی: برای رسم نمودار $y = f(x + k)$ ، اگر $k > 0$ باشد، باید نمودار $f(x)$ را k واحد در راستای افقی به سمت چپ ببریم. اما اگر $k < 0$ باشد، باید این انتقال را به اندازهٔ $|k|$ واحد به سمت راست انجام دهیم.



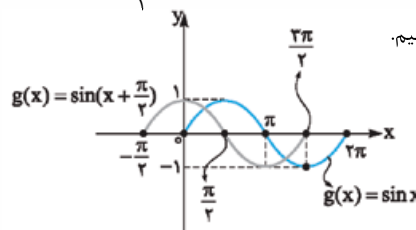
تذکره در انتقال افقی بُرد تابع تغییری نمی‌کند و فقط دامنهٔ آن به اندازهٔ k واحد تغییر می‌کند.

مثال نمودار توابع $f(x) = \sin x + 1$ و $g(x) = \sin(x + \frac{\pi}{4})$ را با توجه به نمودار $y = \sin x$ با دامنهٔ $[0, 2\pi]$ رسم کنید.

پاسخ برای تابع $f(x) = \sin x + 1$ ، نمودار $y = \sin x$ با دامنهٔ $[0, 2\pi]$ را یک واحد به سمت بالا در راستای قائم انتقال می‌دهیم. دامنهٔ $f(x)$ همچنان $[0, 2\pi]$ باقی می‌ماند.



برای تابع $g(x) = \sin(x + \frac{\pi}{4})$ ، نمودار $y = \sin x$ را به اندازهٔ $\frac{\pi}{4}$ واحد به سمت چپ در راستای افقی انتقال می‌دهیم.

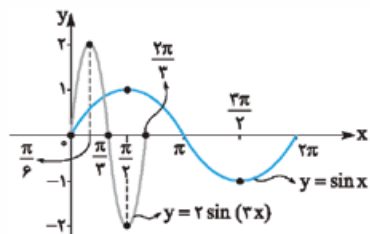


$$D_{g(x)} = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right]$$

برای خرید این کتاب از مَدابوک روی همین جمله کلیک کنید

مثال به کمک نمودار تابع $y = \sin x$ ، نمودار تابع $y = 2 \sin(3x)$ را رسم کنید.

پاسخ ضریب ۲ باعث می‌شود که نمودار اولیه انبساط عمودی (انبساط در راستای محور

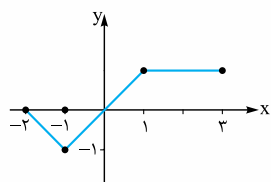


ی‌ها) داشته باشد، همچنین ضریب ۳ برای x باعث می‌شود نمودار اولیه انقباض افقی (در راستای محور x) داشته باشد.

مثال نمودار $f(x)$ در مقابل رسم

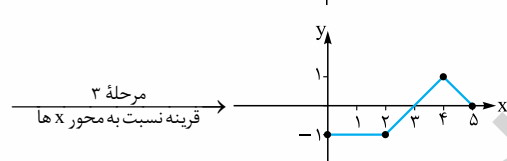
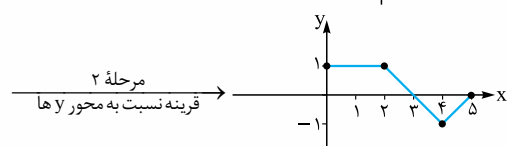
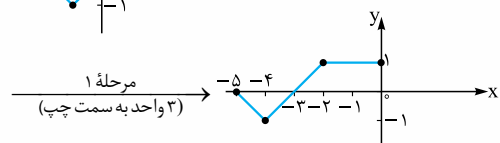
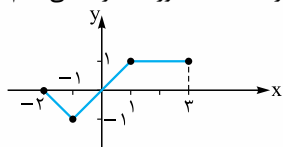
شده است. نمودار $y = -f(3-x)$

را رسم کنید.

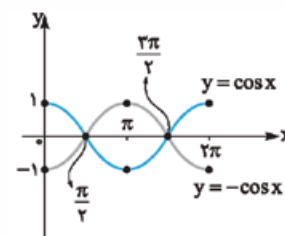


پاسخ مراحل رسم: ۱- نمودار را ۳ واحد به سمت چپ می‌بریم. ۲- نمودار مرحله ۱ را

نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم. ۳- نمودار مرحله ۲ را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.



مثال قرینه نمودار تابع $y = \cos x$ را نسبت به محور x ها در بازه $[0, 2\pi]$ رسم کنید.

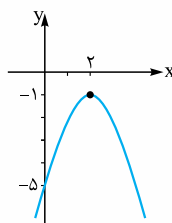


پاسخ ابتدا نمودار $y = \cos x$ را رسم

می‌کنیم، سپس برای رسم قرینه آن، نسبت به محور x ها یعنی $y = -\cos x$ ، نمودار را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.

مثال نمودار زیر از قرینه‌یابی نسبت به محور x ها و انتقال نمودار تابع $y = x^2$ به

دست آمده است. ضابطه آن را مشخص کنید.



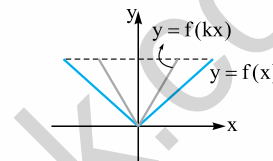
پاسخ با توجه به نمودار، تابع $y = x^2$ نسبت

به محور x ها قرینه شده، دو واحد به سمت راست و یک واحد پایین آمده است، پس ضابطه‌اش به صورت $y = -(x-2)^2 - 1$ است.

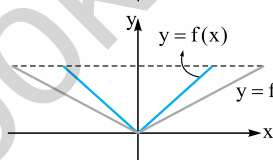
انبساط و انقباض افقی

برای رسم نمودار تابع $y = f(kx)$ ، باید طول نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را در $\frac{1}{k}$ ضرب کنیم.

اگر $k > 1$ باشد، انقباض افقی در راستای محور x ها و اگر $0 < k < 1$ باشد، انقباض افقی در راستای محور x ها داریم.



(انقباض) $k > 1$



(انبساط) $0 < k < 1$

تذکره نمودار تابع $y = f(-x)$ قرینه نمودار تابع $y = f(x)$ نسبت به محور y ها است.

تکلیف برای بررسی تابع $g(x) = af(bx+c)+d$ از روی نمودار $f(x)$ ، باید

به ترتیب c (انتقال افقی)، b (انبساط و انقباض افقی)، a (انبساط و انقباض عمودی) و در نهایت d (انتقال عمودی) را انجام دهیم.

مثال نمودار تابع $y = (-x-1)^3$ را به کمک نمودار تابع $y = x^3$ رسم کنید.

$y = x^3$	x	-1	0	1
	y	-1	0	1

ابتدا نمودار $y = x^3$ را رسم کرده، سپس آن را یک واحد به سمت راست می‌بریم و در نهایت آن را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم.

