

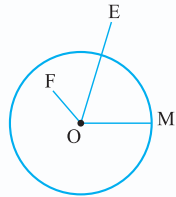
فصل دایره





مفاهیم اولیه و زاویه هادر دایره

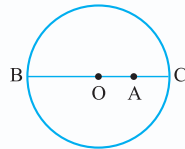
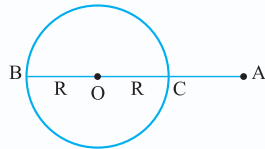
۱ در صفحه، یک نقطه نسبت به دایره یکی از وضعیت‌های زیر را دارد:



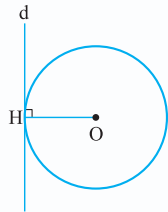
$$\begin{cases} OM = R \Leftrightarrow \text{روی دایره } M \\ OE > R \Leftrightarrow \text{بیرون دایره } E \\ OF < R \Leftrightarrow \text{درون دایره } F \end{cases}$$

۲ دورترین و نزدیک‌ترین نقاط دایره $E(O, R)$ از نقطه A با وصل کردن نقطه A

به مرکز دایره و تقاطع خط حاصل با دایره، به دست می‌آید و با فرض $OA = d$ داریم $AB = d + R$ ، $AC = |d - R|$

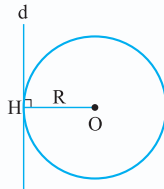


۳ خط مماس بر شعاع نقطه تماس، عمود است و بالعکس خط عمود بر انتهای شعاع، بر دایره مماس است.

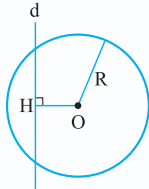


۴ وضعیت خط و دایره: دایره $C(O, R)$ و خط d را در صفحه در نظر می‌گیریم. در این صورت دایره C و خط d یکی از وضعیت‌های زیر را

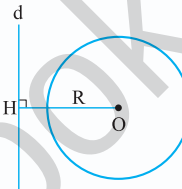
نسبت به یکدیگر دارند.



خط و دایره مماس‌اند. $(OH = R)$



خط و دایره متقاطع‌اند. $(OH < R)$



خط و دایره نقطه اشتراکی ندارند. $(OH > R)$

تست اگر فاصله نقاط M و N تا مرکز دایره $C(O, R)$ ریشه‌های معادله $2x^2 - 5Rx + 2R^2 = 0$ باشد، آن‌گاه این نقاط نسبت به

دایره چگونه‌اند؟

(۱) هر دو بیرون دایره واقع‌اند.

(۲) یکی روی دایره، دیگری بیرون آن واقع است.

(۳) هر دو درون دایره‌اند.

(۴) یکی درون و دیگری بیرون دایره قرار دارد.

$$2x^2 - 5Rx + 2R^2 = 0 \Rightarrow (2x - R)(x - 2R) = 0 \Rightarrow x = \frac{R}{2} \text{ یا } x = 2R$$

پاسخ گزینه «۴»

پس فاصله یکی از نقاط کمتر و دیگری بیشتر از شعاع دایره است و این یعنی یک نقطه داخل و دیگری بیرون دایره قرار دارد.

تست دورترین و نزدیک‌ترین فاصله یک نقطه ثابت از نقاط یک دایره به ترتیب ۱۳ و ۵ است. مساحت دایره کدام است؟

4π (۴)

25π (۳)

16π (۲)

9π (۱)

پاسخ گزینه «۲» فرض کنیم نقطه خارج دایره باشد. در این صورت داریم:

$$\begin{cases} d + R = 13 \\ d - R = 5 \end{cases} \xrightarrow{+} 2d = 18 \Rightarrow d = 9, R = 13 - 9 = 4 \quad S = \pi R^2 = \pi \times 4^2 = 16\pi$$

اگر نقطه داخل دایره باشد، داریم:

$$\begin{cases} d + R = 13 \\ R - d = 5 \end{cases} \xrightarrow{+} 2R = 18 \Rightarrow R = 9, d = 4 \quad S = \pi R^2 = \pi \times 9^2 = 81\pi$$

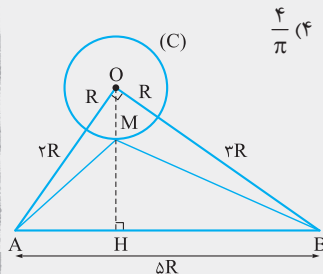


دایره



۵ زاویه مرکزی: زاویه‌ای که رأس آن مرکز دایره باشد.

تست دایره $C(O, R)$ مفروض است. نقاط A و B از مرکز دایره به ترتیب به فاصله‌های $۳R$ و $۴R$ قرار دارند. اگر فاصله دو نقطه A و B برابر $۵R$ و M نقطه‌ای روی دایره باشد، آن گاه کمترین مساحت مثلث ABM چه کسری از مساحت دایره است؟



$$\frac{4}{\pi} \quad (۴)$$

$$\frac{5}{2\pi} \quad (۳)$$

$$\frac{7}{2\pi} \quad (۲)$$

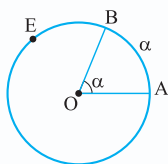
$$\frac{3}{\pi} \quad (۱)$$

پاسخ گزینه «۲» نقاط A و B خارج دایره قرار دارند و مثلث AOB قائم‌الزاویه است. مساحت مثلث ABM وقتی کمترین است که ارتفاع MH در آن کمترین مقدار را داشته باشد و این وضعیت برای نقطه M وقتی حاصل می‌شود که از O عمود OH را بر خط شامل AB رسم کنیم در این صورت محل تقاطع این عمود و دایره جای نقطه M است و در این حالت مثلث AMB کمترین مساحت را دارد و مقدار آن به شرح زیر به دست می‌آید:

$$S_{(AOB)} = \frac{1}{2} OH \times AB = \frac{1}{2} OA \times OB \Rightarrow OH = \frac{3R \times 4R}{5R} = \frac{12}{5} R$$

$$MH = OH - OM = \frac{12}{5} R - R = \frac{7}{5} R$$

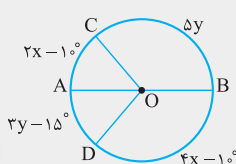
$$\frac{S_{(ABM)}}{S_{\text{دایره}}} = \frac{\frac{1}{2} MH \times AB}{\pi R^2} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{7}{5} R \times 5R}{\pi R^2} = \frac{7}{2\pi}$$



۶ اندازه زاویه مرکزی: اندازه زاویه مرکزی برحسب درجه برابر اندازه کمان روبه‌رو به آن برحسب درجه می‌باشد و به شعاع دایره بستگی ندارد.

$$\widehat{AEB} = 36^\circ - \widehat{AB} = 36^\circ - \alpha$$

۷ طول کمان وقتی که اندازه زاویه مرکزی روبه‌رو به آن α درجه باشد برابر $L = \frac{\alpha}{360} (2\pi R) = \frac{\pi R \alpha}{180}$ می‌باشد.



تست در شکل مقابل، O مرکز دایره و AB قطر آن است. اندازه زاویه $\widehat{COD}$ کدام است؟

$$110^\circ \quad (۲)$$

$$115^\circ \quad (۱)$$

$$116^\circ \quad (۴)$$

$$120^\circ \quad (۳)$$

پاسخ گزینه «۱»

$$\begin{cases} \widehat{AC} + \widehat{BC} = 110^\circ \\ \widehat{AD} + \widehat{BD} = 110^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 10^\circ + 5y = 110^\circ \\ 3y - 15^\circ + 4x - 10^\circ = 110^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 5y = 120^\circ \\ 3y + 4x = 135^\circ \end{cases}$$

$$-10y + 3y = -380^\circ + 1620^\circ \Rightarrow -7y = -1420^\circ \Rightarrow y = 204^\circ$$

$$2x + 5y = 120^\circ \Rightarrow 2x + 5 \times 204^\circ = 120^\circ \Rightarrow 2x = 60^\circ \Rightarrow x = 30^\circ$$

$$\widehat{COD} = \widehat{CD} = \widehat{AC} + \widehat{AD} = 2x - 10^\circ + 3y - 15^\circ = 60^\circ - 10^\circ + 408^\circ - 15^\circ = 443^\circ$$

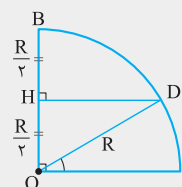
تست در یک ربع دایره با شعاع‌های عمود بر هم OA و OB ، عمود منصف شعاع OB ، کمان ربع دایره را در نقطه D قطع می‌کند. اندازه کمان AD کدام است؟

$$36^\circ \quad (۴)$$

$$30^\circ \quad (۳)$$

$$45^\circ \quad (۲)$$

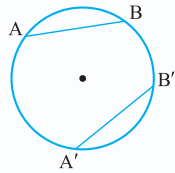
$$15^\circ \quad (۱)$$



پاسخ گزینه «۳» مثلث OHD قائم‌الزاویه است و یک ضلع آن نصف وتر آن است $OH = \frac{OD}{2}$ پس اندازه

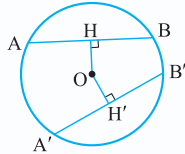
زوایای حاده آن 30° و 60° می‌باشد. در نتیجه داریم:

$$\widehat{HOD} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{AOD} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ \Rightarrow \widehat{AD} = 30^\circ$$



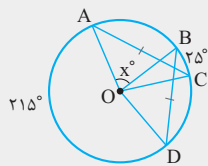
۸ دو وتر در یک دایره (یا دو دایره با شعاع‌های مساوی) برابرند اگر و تنها اگر کمان‌های نظیر آن‌ها برابر باشند.

$$AB = A'B' \Leftrightarrow \widehat{AB} = \widehat{A'B'}$$



۹ دو وتر در یک دایره (یا دو دایره با شعاع‌های مساوی) برابرند اگر و تنها اگر فاصله مرکز دایره از آن‌ها برابر باشد.

$$AB = A'B' \Leftrightarrow OH = OH'$$



تست در شکل روبه‌رو O مرکز دایره است و داریم $\widehat{BC} = 25^\circ$ ، کمان بزرگ $\widehat{AD}$ برابر 215° و $AC = BD$.

مقدار x کدام است؟

$$5^\circ \quad (2)$$

$$8^\circ \quad (1)$$

$$3^\circ \quad (4)$$

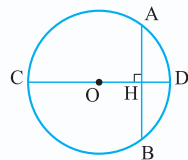
$$6^\circ \quad (3)$$

$$AC = BD \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD} \Rightarrow \widehat{AB} + \widehat{BC} = \widehat{BC} + \widehat{CD} \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{CD}$$

$$\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CD} + \widehat{AD} = 360^\circ \Rightarrow 2\widehat{AB} + 25^\circ + 215^\circ = 360^\circ \Rightarrow \widehat{AB} = 60^\circ$$

$$\widehat{AOB} = \widehat{AB} \Rightarrow x = 60^\circ$$

پاسخ گزینه ۳

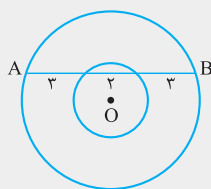


۱۰ قطر عمود بر یک وتر، آن وتر و کمان‌های نظیر آن را نصف می‌کند.

$$CD \perp AB \Rightarrow AH = BH, \widehat{AD} = \widehat{BD}, \widehat{AC} = \widehat{BC}$$

۱۱ در هر دایره، قطری از آن وتری را که قطر نیست نصف کند، بر آن وتر عمود است و کمان‌های نظیر آن را نصف می‌کند.

۱۲ در هر دایره قطری از دایره که یک سر آن وسط کمان نظیر یک وتر باشد، بر آن وتر عمود است و آن را نصف می‌کند.



تست در شکل مقابل، دو دایره هم‌مرکز هستند، با توجه به شکل، مساحت ناحیه بین دو دایره کدام است؟

$$16\pi \quad (1)$$

$$12\pi \quad (2)$$

$$18\pi \quad (3)$$

$$15\pi \quad (4)$$

پاسخ گزینه ۴ از مرکز دایره بر وتر AB خطی عمود رسم می‌کنیم. وترهای AB و CD هر دو نصف می‌شوند، پس $CH = DH = 1$ و $AH = BH = 4$. شعاع دایره‌ها را به ترتیب $OB = R$ و $OC = r$ می‌نامیم، بنا به قضیه فیثاغورس داریم:

$$\begin{cases} OB^2 = OH^2 + BH^2 \\ OC^2 = OH^2 + CH^2 \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} OB^2 - OC^2 = BH^2 - CH^2 \Rightarrow R^2 - r^2 = 4^2 - 1^2 = 16 - 1 = 15$$

$$\text{مساحت بین دو دایره} = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2) = 15\pi$$

تست در مثلث قائم‌الزاویه AOB ($\hat{O} = 90^\circ$) دایره‌ای به مرکز O وتر AB را در نقطه C و D قطع می‌کند. اگر $BD = 2$ ، $CD = 8$ و $AC = 4$ باشد، آن‌گاه مساحت مثلث AOB کدام است؟

$$28\sqrt{3} \quad (4)$$

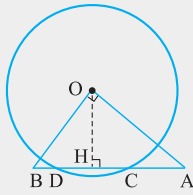
$$28\sqrt{2} \quad (3)$$

$$24\sqrt{3} \quad (2)$$

$$24\sqrt{2} \quad (1)$$

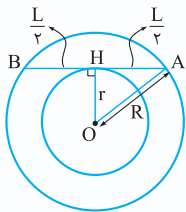


دایره



پاسخ گزینه ۴: عمود OH وتر CD را نصف می‌کند در نتیجه $CH = DH = 4$ و با توجه به $BD = 2$ و $AC = 4$ نتیجه می‌شود $BH = BD + DH = 2 + 4 = 6$ و $AH = CH + AC = 4 + 4 = 8$. اما در مثلث قائم‌الزاویه AOB، ارتفاع وارد بر وتر، واسطه هندسی دو پاره‌خطی است که روی وتر پدید می‌آورد. $OH^2 = AH \times BH = 8 \times 6 = 48 \Rightarrow OH = 4\sqrt{3}$ لذا داریم:

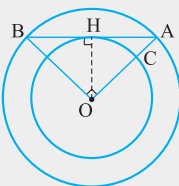
$$S_{(AOB)} = \frac{1}{2} OH \times AB = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times (2 + 8 + 4) = 2\sqrt{3} \times 14 = 28\sqrt{3}$$



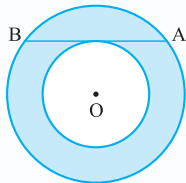
۱۳: همه وترهایی به طول L در دایره $C(O, R)$ ، وسطشان روی دایره‌ای به مرکز O و شعاع $r = \frac{\sqrt{4R^2 - L^2}}{2}$ قرار دارد و بالعکس، اگر وتر بر این دایره مماس شود، آن‌گاه در نقطه تماس نصف می‌شود و طول آن برابر L است.

تست دایره‌ای به شعاع ۱۲ مفروض است. وسط همه وترهایی که زاویه مرکزی روبه‌رو به کمان آن‌ها قائمه است، روی یک شکل قرار دارند، کمترین فاصله نقاط این شکل و دایره کدام است؟

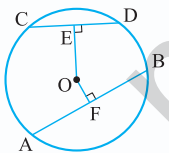
- (۱) $6 - 3\sqrt{2}$ (۲) $6\sqrt{2} - 6$ (۳) $12\sqrt{2} - 12$ (۴) $12 - 6\sqrt{2}$



پاسخ گزینه ۴: فرض کنیم AB یکی از وترهایی باشد که زاویه مرکزی روبه‌رو به کمان آن قائمه است ($\angle AOB = 90^\circ$) چون $OA = OB$ است، پس مثلث AOB قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است، پس داریم: $OA^2 + OB^2 = AB^2 \Rightarrow AB^2 = 12^2 + 12^2 = 2 \times 12^2 \Rightarrow AB = 12\sqrt{2}$ عمود OH وتر AB را نصف می‌کند $AH = BH = 6\sqrt{2}$ و چون در مثلث قائم‌الزاویه AOH میانه نظیر وتر، نصف وتر است؛ پس $OH = \frac{AB}{2} = 6\sqrt{2}$. بنابراین وسط همه وترهای AB روی دایره‌ای به مرکز O و شعاع $6\sqrt{2}$ قرار دارد که مطابق شکل فوق کمترین فاصله دو دایره $AC = 12 - 6\sqrt{2}$ است.

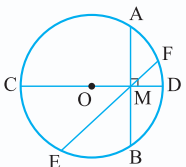


نکته: اگر دو دایره، هم‌مرکز باشند و وتر AB از دایره بزرگ بر دایره کوچک مماس باشد، آن‌گاه مساحت بین دو دایره برابر است با: $\frac{\pi AB^2}{4}$



۱۴: از دو وتر نابرابر در یک دایره (یا دو دایره به شعاع‌های مساوی) آن که بزرگ‌تر است به مرکز دایره نزدیک‌تر است و بالعکس.

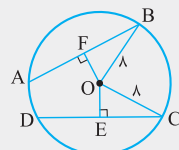
$$AB > CD \Leftrightarrow OF < OE$$



۱۵: کوتاه‌ترین وتر در یک دایره، که از نقطه‌ای داخل دایره رسم می‌شود، وتری است که بر قطر گذرنده از آن نقطه، عمود است.

$$AB \leq EF \leq CD$$

تست در دایره $C(O, 8)$ اندازه وترهای AB و CD به ترتیب $4x + 6$ و $2x + 8$ است که x عددی صحیح است. اگر فاصله مرکز دایره تا وتر CD بیشتر از فاصله آن تا وتر AB باشد، آن‌گاه فاصله مرکز دایره تا وتر CD کدام است؟



- (۱) $\sqrt{7}$ (۲) $2\sqrt{7}$ (۳) $\sqrt{15}$ (۴) $\sqrt{30}$

پاسخ گزینه ۲:

$$1 < x \Rightarrow 2x + 8 < 4x + 6 \Rightarrow CD < AB \Rightarrow OE > OF \text{ (فرض)}$$



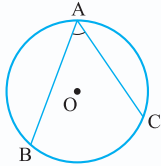
از طرفی شعاع دایره ۸ است و در مثلث‌های قائم‌الزاویه OCE و OBF داریم:

$$\begin{cases} BF < OB \\ CE < OC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{AB}{2} < 8 \\ \frac{CD}{2} < 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3 < 8 \\ x + 4 < 8 \end{cases} \Rightarrow x < \frac{5}{2}$$

بنابراین $\frac{5}{2} > x > 1$ و چون x عددی صحیح است، نتیجه می‌شود $x = 2$ و داریم:

$$CE = \frac{CD}{2} = \frac{2x + 8}{2} = x + 4 = 6$$

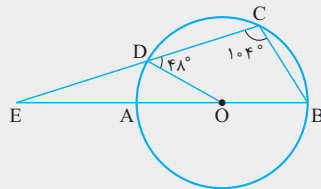
$$OC^2 = OE^2 + CE^2 \Rightarrow 8^2 = OE^2 + 6^2 \Rightarrow OE^2 = 64 - 36 = 28 \Rightarrow OE = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$



۱۶ زاویه محاطی: زاویه‌ای است که رأس آن روی دایره و اضلاع آن دو وتر از دایره باشند. اندازه هر زاویه محاطی برابر

است با نصف اندازه کمان روبه‌رو به آن $(\hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2})$.

تست در شکل زیر، O مرکز دایره و AB قطر آن است. امتداد وتر CD امتداد قطر AB را در نقطه E قطع می‌کند. اگر $\hat{ODC} = 48^\circ$



و $\hat{C} = 104^\circ$ باشد، آن‌گاه اندازه زاویه $\hat{E}$ کدام است؟

۲۲° (۲)

۱۸° (۱)

۲۰° (۴)

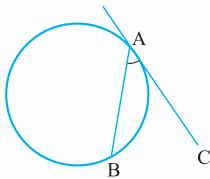
۱۶° (۳)

پاسخ گزینه «۴» زاویه C محاطی است، پس داریم:

$$\hat{C} = \frac{\widehat{BAD}}{2} \Rightarrow 104^\circ = \frac{\widehat{AB} + \widehat{AD}}{2} \Rightarrow 208^\circ = 180^\circ + \widehat{AD} \Rightarrow \widehat{AD} = 28^\circ \Rightarrow \hat{AOD} = 28^\circ$$

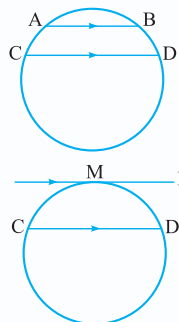
در مثلث ODE، زاویه $\hat{ODC}$ خارجی است، در نتیجه:

$$\hat{ODC} = \hat{E} + \hat{AOD} \Rightarrow 48^\circ = \hat{E} + 28^\circ \Rightarrow \hat{E} = 20^\circ$$



۱۷ زاویه ظلی: زاویه‌ای که رأس آن روی دایره قرار دارد و یکی از اضلاع آن وتر از دایره و ضلع دیگر آن مماس بر

دایره است. اندازه هر زاویه ظلی برابر است با نصف اندازه کمان روبه‌رو به آن $(\hat{A} = \frac{\widehat{AB}}{2})$.

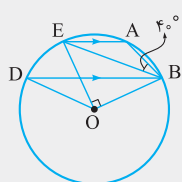


$$AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD}$$

$$\widehat{CM} = \widehat{DM}$$

۱۸ اندازه‌های کمان‌های محصور بین دو وتر موازی با هم برابرند.

۱۹ اگر خط L در نقطه M بر دایره مماس باشد و وتر CD موازی L باشد، داریم:



تست دایره‌ای به مرکز O مفروض است. دو وتر موازی AE و BD از این دایره در یک طرف O قرار دارند به

طوری که $\hat{ABE} = 40^\circ$ و $\hat{BOE} = 90^\circ$. اندازه زاویه BOD چند درجه است؟

۱۲۰° (۲)

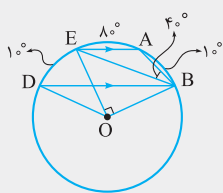
۱۰۰° (۱)

۱۳۰° (۴)

۱۱۵° (۳)



دایره

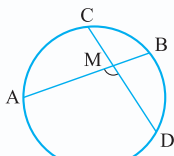


پاسخ گزینه ۱: چون $AE \parallel BD$ پس $\widehat{AB} = \widehat{DE}$ و داریم:

$$\widehat{BOE} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AE} + \widehat{AB} = 90^\circ \Rightarrow 2 \times 40^\circ + \widehat{AB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AB} = 10^\circ$$

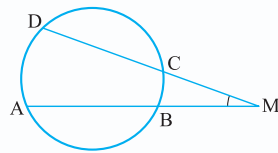
$$\widehat{BOD} = \widehat{AB} + \widehat{AE} + \widehat{DE} = 10^\circ + 40^\circ + 40^\circ = 90^\circ$$

زاویه بین دو وتر برابر است با:



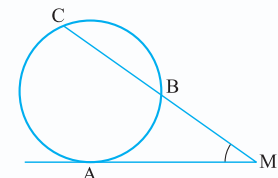
$$\hat{M} = \frac{\widehat{AD} + \widehat{BC}}{2}$$

زاویه بین امتداد دو وتر برابر است با:



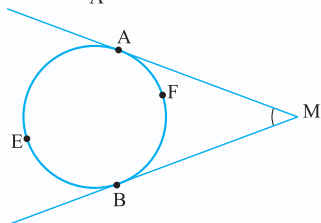
$$\hat{M} = \frac{\widehat{AD} - \widehat{BC}}{2}$$

زاویه بین خط مماس و امتداد وتر برابر است با:



$$\hat{M} = \frac{\widehat{AC} - \widehat{AB}}{2}$$

زاویه بین دو خط مماس برابر است با:

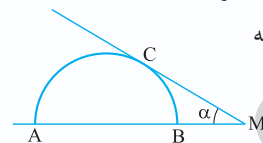


$$\hat{M} = \frac{\widehat{AEB} - \widehat{AFB}}{2}$$

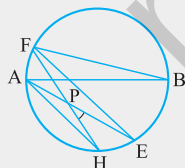
اگر زاویه بین دو مماس، $\hat{M} = \alpha$ باشد (شکل فوق)، آن گاه اندازه کمان های AEB و AFB به ترتیب $180^\circ + \alpha$ و $180^\circ - \alpha$ است.

اگر زاویه بین مماس و امتداد قطر نیم دایره برابر $\hat{M} = \alpha$ باشد، آن گاه اندازه کمان های AC و BC به

ترتیب $90^\circ + \alpha$ و $90^\circ - \alpha$ است.



تست در شکل، AB قطری از دایره است و وتر AH با وتر EF موازی است. اگر $\widehat{FBA} = 20^\circ$ ، در این صورت اندازه زاویه HPE کدام است؟



۳۵° (۲)

۲۵° (۴)

۴۰° (۱)

۳۰° (۳)

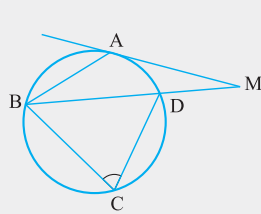
پاسخ گزینه ۱

$$AH \parallel EF \Rightarrow \widehat{HE} = \widehat{AF} \quad (1)$$

$$\widehat{HPE} = \frac{\widehat{AF} + \widehat{HE}}{2} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \widehat{HPE} = \frac{\widehat{AF} + \widehat{AF}}{2} = \widehat{AF}$$

$$\widehat{B} = \widehat{AF} \Rightarrow 20^\circ = \widehat{AF} \Rightarrow \widehat{AF} = 40^\circ \Rightarrow \widehat{HPE} = \widehat{AF} = 40^\circ$$



تست در شکل روبه‌رو، $MA = AB$ و MA بر دایره مماس است. اگر $\hat{M} = 25^\circ$ ، آنگاه اندازه زاویه

$\hat{C}$ چند درجه است؟

75° (۲)

5° (۱)

85° (۴)

60° (۳)

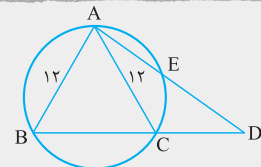
پاسخ گزینه «۲»

$$\hat{M} = \frac{\widehat{AB} - \widehat{AD}}{2} \Rightarrow \widehat{AB} - \widehat{AD} = 2 \times 25^\circ = 50^\circ \quad (1)$$

$$MA = AB \Rightarrow \widehat{ABD} = \hat{M} = 25^\circ \Rightarrow \frac{\widehat{AD}}{2} = 25^\circ \Rightarrow \widehat{AD} = 50^\circ \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \widehat{AB} = 50^\circ + \widehat{AD} = 50^\circ + 50^\circ = 100^\circ$$

$$\text{زاویه محاطی } \hat{C} = \frac{\widehat{BAD}}{2} = \frac{\widehat{AB} + \widehat{AD}}{2} = \frac{100^\circ + 50^\circ}{2} = \frac{150^\circ}{2} = 75^\circ$$



تست در دایره مقابل، طول دو وتر AB و AC برابر ۱۲ است. نقطه D روی امتداد وتر BC چنان قرار

دارد که AD دایره را در E قطع می‌کند و $AE = 8$ می‌باشد. اندازه DE کدام است؟

9 (۲)

8 (۱)

11 (۴)

10 (۳)

پاسخ گزینه «۳» C را به E وصل می‌کنیم. چون دو وتر AB و AC برابرند پس کمان‌های آن‌ها نیز برابر

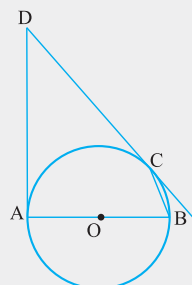
$$\hat{D} = \frac{\widehat{AB} - \widehat{CE}}{2} = \frac{\widehat{AC} - \widehat{CE}}{2} = \frac{\widehat{AE}}{2}$$

است $(\widehat{AB} = \widehat{AC})$. داریم:

اما زاویه $\hat{C}_1$ محاطی است، پس $\hat{C}_1 = \frac{\widehat{AE}}{2}$ و در نتیجه $\hat{D} = \hat{C}_1$ می‌شود و داریم:

$$(\hat{CAE} = \hat{CAD}, \hat{C}_1 = \hat{D}) \Rightarrow \triangle ACE \sim \triangle ADC \Rightarrow \frac{AC}{AD} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow \frac{12}{8+DE} = \frac{8}{12}$$

$$\Rightarrow 64 + 8DE = 144 \Rightarrow DE = \frac{144 - 64}{8} = \frac{80}{8} = 10$$



تست در شکل مقابل، AB قطر دایره و DA و DC به ترتیب در نقاط A و C بر دایره مماس‌اند. اگر اندازه

زاویه ظلی C برابر 35° باشد، آنگاه اندازه زاویه D کدام است؟

6° (۱)

7° (۲)

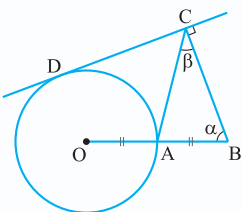
75° (۳)

65° (۴)

پاسخ گزینه «۲» زاویه ظلی C برابر 35° است، پس اندازه کمان روبه‌رو به آن $\widehat{BC} = 70^\circ$ است و داریم:

$$\widehat{AC} = 180^\circ - \widehat{BC} = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$$

$$\hat{D} = 180^\circ - \widehat{AC} = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$$



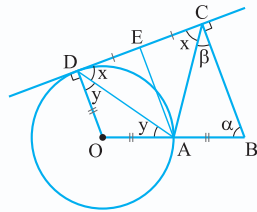
مثال در شکل مقابل، شعاع OA از دایره‌ای به مرکز O را به اندازه خودش تا نقطه B امتداد داده‌ایم. سپس

مماس دلخواهی در نقطه D بر دایره رسم می‌کنیم و از B بر آن عمود BC را رسم می‌کنیم. ثابت

کنید $\alpha = 2\beta$.



دایره



پاسخ A را به E وسط ساق CD در دوزنقه قائم‌الزاویه OBCD وصل می‌کنیم، پس AE پاره‌خط میانگین دوزنقه است. لذا با قاعده‌های دوزنقه موازی است و در نتیجه AE بر CD عمود و نهایتاً AE عمودمنصف CD است که نتیجه می‌دهد مثلث ACD متساوی‌الساقین می‌باشد ($AD = AC$) و می‌توان نوشت:

$$x = 90^\circ - \beta \Rightarrow y = 90^\circ - x = 90^\circ - (90^\circ - \beta) = \beta$$

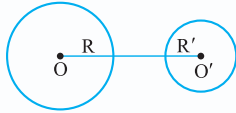
$$\widehat{DAC} = 180^\circ - x - x = 180^\circ - 2x = 180^\circ - 2(90^\circ - \beta) = 2\beta$$

$$ABC \text{ مثلث } \widehat{OAC} \Rightarrow \widehat{OAC} = \beta + \alpha \Rightarrow \widehat{OAD} + \widehat{DAC} = \beta + \alpha \Rightarrow \beta + 2\beta = \beta + \alpha \Rightarrow \alpha = 2\beta$$

۲۶ **وضع دو دایره نسبت به هم:** دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ با فرض $R > R'$ و $OO' = d$ به صورت زیر دسته‌بندی می‌شوند.

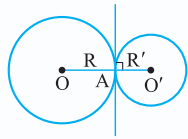
$$d > R + R'$$

۱- دو دایره برون هم (دو دایره متخارج)



$$d = R + R'$$

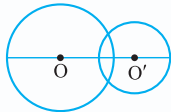
۲- دو دایره مماس برون (مماس خارج)



نکته نقطه تماس دو دایره و مراکز آن‌ها روی یک خط واقع‌اند، زیرا شعاع‌های OA و O'A بر خط مماس در نقطه A عمودند.

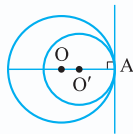
۳- دو دایره متقاطع

$$R - R' < d < R + R'$$



۴- دو دایره مماس درون

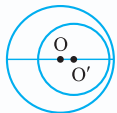
$$d = R - R'$$



نکته نقطه تماس دو دایره و مراکز آن‌ها روی یک خط واقع‌اند، زیرا شعاع‌های OA و O'A بر خط مماس در نقطه A عمودند.

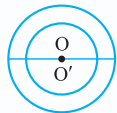
۵- دو دایره متداخل

$$d < R - R'$$

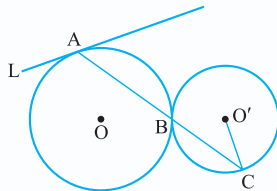


۶- دایره‌های هم‌مرکز

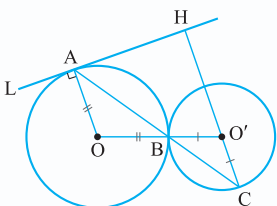
$$d = 0$$

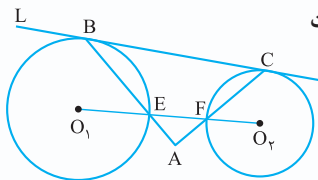


مثال در شکل مقابل، دو دایره در نقطه B مماس خارج‌اند و خط L در نقطه A بر دایره به مرکز O مماس است. اگر امتداد AB، دایره به مرکز O' را در نقطه C قطع کند، ثابت کنید امتداد O'C بر خط L عمود است.



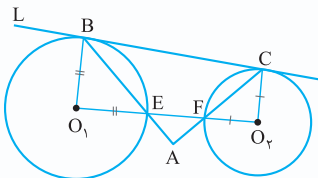
پاسخ خط مماس بر شعاع گذرنده از نقطه تماس، عمود است، پس $OA \perp L$. از طرفی، دو مثلث متساوی‌الساقین AOB و BO'C متشابه‌اند زیرا $\widehat{O'BC} = \widehat{OBA}$. پس $\widehat{OAC} = \widehat{ACH}$ و این یعنی CH با OA موازی و در نتیجه بر خط L عمود است.





مثال در شکل مقابل، دو دایره متخارج هستند و خط L بر هر دو دایره مماس است. ثابت

کنید $AB \perp AC$.



پاسخ فرض کنیم $O_1\hat{B}E = \alpha$ و $O_2\hat{C}F = \beta$ ، در این صورت با توجه به مثلث‌های

متساوی الساقین O_1BE و O_2CF داریم:

$$B\hat{O}_1E = 180^\circ - \alpha - \alpha = 180^\circ - 2\alpha$$

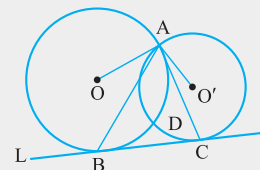
$$C\hat{O}_2F = 180^\circ - \beta - \beta = 180^\circ - 2\beta$$

اما O_1B و O_2C هر دو بر خط L عمودند، زیرا شعاع نقطه تماس بر خط مماس عمود است. پس داریم:

$$O_1B \parallel O_2C \Rightarrow B\hat{O}_1E + C\hat{O}_2F = 180^\circ \Rightarrow 180^\circ - 2\alpha + 180^\circ - 2\beta = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$$

$$A\hat{E}F = O_1\hat{E}B = O_1\hat{B}E = \alpha, \quad A\hat{F}E = O_2\hat{F}C = O_2\hat{C}F = \beta$$

$$\hat{A} + A\hat{E}F + A\hat{F}E = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} + \underbrace{\alpha + \beta}_{90^\circ} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ \Rightarrow AB \perp AC$$



تست در شکل روبه‌رو، خط L بر دو دایره متقاطع در نقاط A و D مماس است. اگر $O\hat{A}O' = 148^\circ$

باشد، آن‌گاه مجموع اندازه‌های کمان‌های $\widehat{ADB}$ و $\widehat{ADC}$ چند درجه است؟

$$212^\circ \quad (2)$$

$$200^\circ \quad (1)$$

$$202^\circ \quad (4)$$

$$248^\circ \quad (3)$$

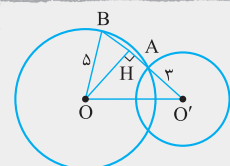
پاسخ گزینه «۲» با توجه به مثلث‌های متساوی الساقین، زوایا مطابق شکل می‌شود و داریم:

$$A\hat{C}B = 90^\circ - \beta, \quad A\hat{B}C = 90^\circ - \alpha$$

$$B\hat{A}C + 90^\circ - \beta + 90^\circ - \alpha = 180^\circ \Rightarrow B\hat{A}C = \beta + \alpha$$

$$O\hat{A}O' = \alpha + \beta + B\hat{A}C \Rightarrow 148^\circ = \alpha + \beta + \alpha + \beta \Rightarrow \alpha + \beta = 74^\circ$$

$$\widehat{ADB} + \widehat{ADC} = A\hat{O}B + A\hat{O}'C = 180^\circ - 2\alpha + 180^\circ - 2\beta = 360^\circ - 2(\alpha + \beta) = 360^\circ - 148^\circ = 212^\circ$$



تست دو دایره متقاطع $C(O', 3)$ و $C(O, 5)$ مفروض‌اند. به ازای بیشترین مقدار صحیح OO' ،

خطی که از O' و نقطه تقاطع دو دایره می‌گذرد، وترى با کدام طول در دایره بزرگ‌تر ایجاد می‌کند؟

$$5/5 \quad (2)$$

$$4/5 \quad (1)$$

$$6 \quad (4)$$

$$5 \quad (3)$$

پاسخ گزینه «۳» از متقاطع بودن دو دایره نتیجه می‌شود $2 < OO' < 8$ و بیشترین مقدار صحیح OO' برابر ۷ است. مطابق

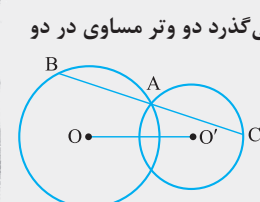
شکل، AB وتر مطلوب است، پس داریم:

$$OO'^2 = OH^2 + O'H^2 \Rightarrow OO'^2 = OB^2 - BH^2 + O'H^2$$

فیثاغورس

عمود OH وتر AB را نصف می‌کند پس $AH = BH = x$ و داریم:

$$7^2 = 5^2 - x^2 + (3 + x)^2 \Rightarrow 49 = 25 - x^2 + 6x + x^2 + 9 \Rightarrow 6x = 15 \Rightarrow x = \frac{5}{2}, \quad AB = 2AH = 2x = 5$$



تست مطابق شکل دو دایره به شعاع‌های ۶ و ۸ در نقطه A متقاطع‌اند و $OO' = 12$. اگر خطی که از A می‌گذرد دو وتر مساوی در دو

دایره ایجاد کند ($AB = AC$)، آن‌گاه طول این وترها کدام است؟

$$\sqrt{130} \quad (2)$$

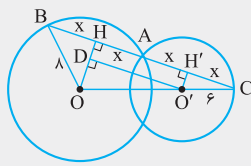
$$\sqrt{120} \quad (1)$$

$$\sqrt{110} \quad (4)$$

$$\sqrt{140} \quad (3)$$



دایره



گزینه «۲» با فرض $AB = AC = 2x$ ، مطابق شکل داریم:

$$OH^2 = OB^2 - BH^2 = 16 - x^2 \Rightarrow OH = \sqrt{16 - x^2}$$

$$O'H'^2 = O'C^2 - CH'^2 = 36 - x^2 \Rightarrow O'H' = \sqrt{36 - x^2}$$

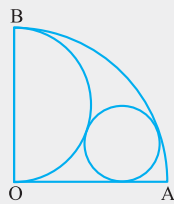
$$O'D = HH' = AH + AH' = x + x = 2x$$

$$OO'^2 = OD^2 + O'D^2 \Rightarrow OO'^2 = (OH - O'H')^2 + O'D^2 \Rightarrow (\sqrt{16 - x^2} - \sqrt{36 - x^2})^2 + (2x)^2 = 12^2$$

$$x^2 = t \Rightarrow 64 - t + 36 - t - 2\sqrt{64 - t}\sqrt{36 - t} + 4t = 144 \Rightarrow \sqrt{64 - t}\sqrt{36 - t} = t - 22$$

$$\Rightarrow 64 \times 36 - 100t + t^2 = t^2 - 44t + 22^2 \Rightarrow 56t = 2304 - 484 = 1820 \Rightarrow t = \frac{1820}{56} = 32.5$$

$$x^2 = 32.5 \Rightarrow AB^2 = 4x^2 = 4 \times 32.5 = 130 \Rightarrow AB = \sqrt{130}$$



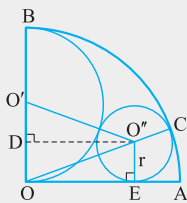
ربع دایره به شعاع‌های عمود بر هم OA و OB مفروض است، نیم‌دایره‌ای به قطر OB داخل آن رسم می‌کنیم. اگر دایره‌ای بر OA و ربع دایره و نیم‌دایره مماس باشد، آن‌گاه شعاع این دایره چه کسری از شعاع ربع دایره است؟

$$\frac{1}{4} (2)$$

$$\frac{1}{3} (1)$$

$$\frac{2}{3} (4)$$

$$\frac{1}{2} (3)$$



گزینه «۲» شعاع ربع دایره و شعاع دایره را به ترتیب R و r در نظر می‌گیریم. نیم‌دایره و دایره مماس خارج هستند پس $O'O'' = \frac{R}{2} + r$. ربع دایره و دایره در نقطه C مماس داخل هستند پس $OO'' = R - r$. در مثلث O'O''O ارتفاع O'D را رسم می‌کنیم، داریم:

$$OD = O''E = r, O'D = OO'' - OD = \frac{R}{2} - r$$

حال به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث‌های O'O''D و OO''D داریم:

$$O''D^2 = O'O''^2 - O'D^2 = OO''^2 - OD^2 \Rightarrow \left(\frac{R}{2} + r\right)^2 - \left(\frac{R}{2} - r\right)^2 = (R - r)^2 - r^2 \Rightarrow R \times 2r = R \times (R - r)$$

$$\Rightarrow 2r = R - 2r \Rightarrow R = 4r \Rightarrow r = \frac{R}{4}$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

زاویه مرکزی، خط مماس بر دایره

۱- اگر فاصله نقاط E و F تا مرکز دایره C(O, R) ریشه‌های معادله $3x^2 - 7Rx + 4R^2 = 0$ باشد، آن‌گاه این نقاط نسبت به دایره چگونه‌اند؟

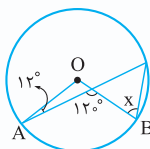
(۲) یکی روی دایره و دیگری بیرون آن قرار دارد.

(۱) هر دو بیرون دایره قرار دارند.

(۴) یکی روی دایره و دیگری درون آن قرار دارد.

(۳) هر دو درون دایره واقع‌اند.

۲- در شکل مقابل، O مرکز دایره است. مقدار x کدام است؟



$$66^\circ (2)$$

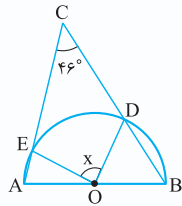
$$64^\circ (1)$$

$$58^\circ (4)$$

$$60^\circ (3)$$



۳- در شکل مقابل، O مرکز نیم‌دایره است. مقدار x کدام است؟



(۱) 84°

(۲) 92°

(۳) 86°

(۴) 88°

۴- نقاط $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ دایره‌ای به مرکز O و شعاع R را به ده قسمت مساوی تقسیم می‌کنند. اگر $A_1A_n = b$ باشد، آن‌گاه اندازه ضلع ده‌ضلعی منتظم $A_1A_2 \dots A_n$ کدام است؟

(۴) $b - 2R$

(۳) $R + \frac{b}{4}$

(۲) $b^2 - R^2$

(۱) $b - R$

۵- در مثلث متساوی‌الساقین ABC ، دایره‌ای مرکزش روی قاعده مثلث، در رأس A بر ضلع AC مماس و از رأس B می‌گذرد. ساق مثلث چند برابر شعاع دایره است؟

(۴) $\frac{3}{2}$

(۳) $\sqrt{3}$

(۲) $\sqrt{3} + 1$

(۱) $2\sqrt{3}$

۶- مربع $ABCD$ به ضلع ۴ واحد، مفروض است. شعاع دایره گذرا بر دو رأس A و B و مماس بر ضلع CD کدام است؟

(سراسری ریاضی خارج از کشور ۹۵)

(۴) ۳

(۳) $2\sqrt{2}$

(۲) $\frac{2}{5}$

(۱) $\frac{2}{25}$

۷- مربع $ABCD$ به ضلع $2 + \sqrt{2}$ واحد مفروض است. شعاع دایره گذرا بر رأس D و مماس بر دو ضلع AB و BC کدام است؟

(۴) $2\sqrt{2} - 1$

(۳) $2 - \sqrt{2}$

(۲) $\sqrt{2}$

(۱) ۲

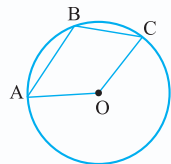
۸- در نیم‌دایره‌ای به قطر AB ، وتر CD چنان قرار دارد که $\widehat{BC} = 47^\circ$ و $AB = 2CD$. اندازه زاویه AOD چند درجه است؟

(۴) 84°

(۳) 73°

(۲) 53°

(۱) 67°



۹- در شکل روبه‌رو، O مرکز دایره، $\hat{A} = 53^\circ$ و $\hat{C} = 47^\circ$ است. اندازه زاویه AOC کدام است؟

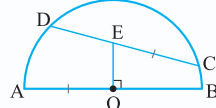
(۲) 16°

(۱) 15°

(۴) 140°

(۳) 120°

۱۰- در شکل زیر، O مرکز نیم‌دایره و $OA = CE$ است. اگر اندازه کمان BC برابر 15° باشد، آن‌گاه اندازه کمان AD چند درجه است؟



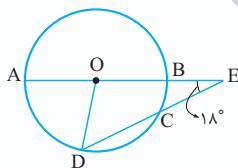
(۲) 6°

(۱) 3°

(۴) 5°

(۳) 45°

۱۱- در دایره زیر، اندازه پاره خط CE با طول شعاع دایره برابر است. اگر $\hat{E} = 18^\circ$ و O مرکز دایره باشد، اندازه کمان AD چند درجه است؟



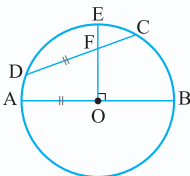
(۱) 45°

(۲) 48°

(۳) 54°

(۴) 72°

۱۲- در شکل زیر، شعاع OE بر قطر AB عمود است. اگر اندازه کمان AD برابر 2° و $DF = OA$ باشد، آن‌گاه اندازه کمان CE کدام است؟



(۱) 3°

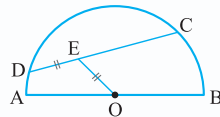
(۲) 45°

(۳) 5°

(۴) 55°



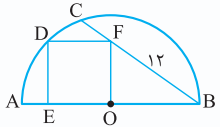
دایره



۱۳- در نیم‌دایره مقابل، $OE = DE$ و قطر AB دو برابر طول پاره‌خط CE است. اندازه کمان CD چند درجه است؟

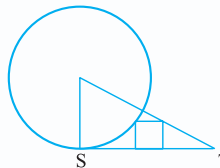
- (۱) 120° (۲) 108° (۳) 105° (۴) 90°

۱۴- مطابق شکل، O مرکز نیم‌دایره و چهارضلعی $OEDF$ مربع است. اگر $BF = 12$ باشد، آن گاه ضلع مربع کدام است؟



- (۱) $3\sqrt{2}$ (۲) $2\sqrt{3}$ (۳) $4\sqrt{2}$ (۴) $4\sqrt{3}$

۱۵- در شکل مقابل، شعاع دایره ۵ و ضلع مربع ۲ است. اندازه مماس TS کدام است؟

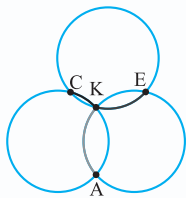


- (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

۱۶- دو سر قطر نیم‌دایره‌ای روی دو ضلع قائم یک مثلث قائم‌الزاویه قرار دارد و موازی وتر مثلث می‌باشد. هم‌چنین وتر مثلث، مماس بر نیم‌دایره است. اگر اندازه اضلاع قائم مثلث ۳ و ۴ باشد، طول شعاع نیم‌دایره کدام است؟

- (۱) $\frac{60}{49}$ (۲) $\frac{60}{48}$ (۳) $\frac{60}{47}$ (۴) $\frac{60}{46}$

۱۷- سه دایره به شعاع‌های مساوی از نقطه K می‌گذرند و دایره دو متقاطع‌اند. حاصل $\widehat{AK} + \widehat{KE} + \widehat{CK}$ کدام است؟



- (۱) 90° (۲) 120° (۳) 180° (۴) 270°

۱۸- در مثلث متساوی‌الساقین ABC ($AB = AC$)، نقطه O در امتداد AC مرکز دایره‌ای است که در نقطه B بر ضلع AB مماس است. امتداد BC این دایره را در D قطع کرده است، مثلث OCD چگونه است؟

(سراسری ریاضی ۹۴)

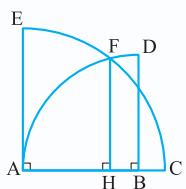
- (۱) متساوی‌الساقین (۲) قائم‌الزاویه (۳) قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین (۴) غیرمستطیل

۱۹- در مثلث متساوی‌الساقین ABC ($AB = AC$ ، $\hat{A} = 40^\circ$)، دایره‌ای به مرکز B و شعاع BC ، ساق AC را در E و ساق AB را در D قطع می‌کند. اندازه زاویه ADE کدام است؟

- (۱) 100° (۲) 105° (۳) 108° (۴) 110°

۲۰- در یک ربع دایره، OA و OB دو شعاع عمود بر هم هستند و نقطه C روی کمان آن، چنان قرار دارد که $BC = 2$ و $AC = 6\sqrt{2}$ است، شعاع ربع دایره کدام است؟

- (۱) $4\sqrt{3}$ (۲) $5\sqrt{2}$ (۳) $3\sqrt{6}$ (۴) ۸



۲۱- در شکل مقابل، دو ربع دایره به شعاع‌های $AB = 25$ و $AC = 30$ رسم شده است. طول پاره‌خط HF کدام است؟

- (۱) ۲۱ (۲) ۲۲ (۳) ۲۳ (۴) ۲۴

۲۲- در مثلث ABC ، $\hat{A} = 45^\circ$ ، $BC = 12$ ، نیم‌دایره‌ای به قطر BC ضلع AB را در D و ضلع AC را در E قطع می‌کند، طول پاره‌خط DE کدام است؟

- (۱) $3\sqrt{2}$ (۲) $6\sqrt{2}$ (۳) $4\sqrt{2}$ (۴) $8\sqrt{2}$



۲۳- در یک ربع دایره OA و OB دو شعاع عمود بر هم هستند. نقطه D روی شعاع OA چنان است که $OD = ۱۵$ و $DA = ۵$ و نقطه C روی

کمان ربع دایره چنان قرار دارد که $\hat{BCD} = 90^\circ$ است. طول پاره خط CD کدام است؟

- (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۰

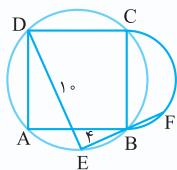
۲۴- در نیم دایره ای به قطر AB ، وتر CD موازی AB است و C به A نزدیک تر است. اگر $CD = ۱$ و $AC = ۶$ باشد، آن گاه شعاع نیم دایره کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) $\frac{۴}{۵}$ (۳) ۵ (۴) ۶

۲۵- در مثلث ABC ، $\hat{B} = 2\hat{A}$. نیم دایره ای به قطر BC ضلع AB را در E و ضلع AC را در D قطع می کند به طوری که $CD = ۲$ و $AD = ۶$ است. طول پاره خط DE کدام است؟

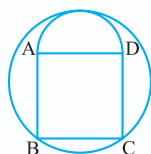
- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۲۶- در شکل زیر، دایره ای از رأس های مربع $ABCD$ می گذرد. نیم دایره ای به قطر BC را رسم می کنیم. نقطه E روی دایره چنان است که $DE = ۱۰$ و $BE = ۴$ ، امتداد BE نیم دایره را در نقطه F قطع می کند. طول پاره خط BF کدام است؟



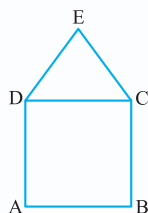
- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۲۷- در شکل روبه رو، مربعی به ضلع واحد و نیم دایره به قطر AD می باشد. دایره ای از رأس های B و C گذشته و بر نیم دایره مماس است. شعاع این دایره کدام است؟



- (۱) $\frac{۵}{۶}$ (۲) $\frac{۲}{۳}$ (۳) $\frac{۳}{۴}$ (۴) $\frac{۴}{۵}$

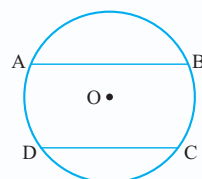
۲۸- در شکل مقابل، $ABCD$ مربعی به ضلع یک و مثلث DEC متساوی الاضلاع است. شعاع دایره ای که از نقاط A ، B و E می گذرد، کدام است؟



- (۱) ۱ (۲) $\sqrt{۳}$ (۳) $\sqrt{۲}$ (۴) $\frac{۳}{۲}$

ونترهای مساوی، قطر عمود بر وتر، ونترهای نامساوی

۲۹- مطابق شکل، در دایره ای به مرکز O ، دو وتر AB و CD موازی اند و فاصله آنها برابر ۵ است، اگر $AB = ۱۶$ و $CD = ۱۴$ ، آن گاه مساحت دایره کدام است؟



- (۱) ۶۵π (۲) ۶۸π (۳) $\frac{۱۱۳\pi}{۲}$ (۴) $\frac{۲۲۵\pi}{۴}$

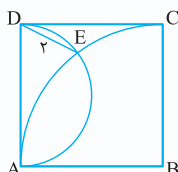
۳۰- در مثلث قائم الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) دایره ای به مرکز A و شعاع AB وتر مثلث را در D و ضلع AC را در E قطع می کند. اگر $BD = ۱۸$ و $CD = ۷$ باشد، آن گاه طول پاره خط CE کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۳۱- امتداد یک وتر به طول ۶ در یک نیم دایره، امتداد قطر نیم دایره را قطع می کند و با آن زاویه 45° می سازد. اگر طول پاره خطی که بین نیم دایره و نقطه تقاطع با قطر پدید می آید، برابر یک باشد، آن گاه طول قطر نیم دایره کدام است؟

- (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۰

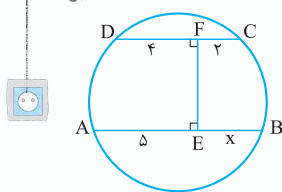
۳۲- مطابق شکل، در مربع $ABCD$ ، نیم دایره و ربع دایره در نقطه E متقاطع اند و $DE = ۲$. مساحت مربع کدام است؟



- (۱) ۱۸ (۲) ۱۵ (۳) ۱۶ (۴) ۲۰



دایره



۳۳- در شکل مقابل، مقدار x کدام است؟

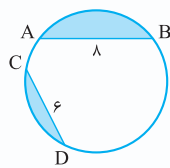
- (۱) ۲
(۲) ۳
(۳) ۴
(۴) ۵

۳۴- دو وتر متقاطع با طول‌های برابر، زاویه 60° با یکدیگر می‌سازند و طول پاره‌خط‌هایی که روی یکدیگر پدید می‌آورند ۲ و ۸ می‌باشد. شعاع دایره کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{7}$ (۲) $4\sqrt{2}$ (۳) $3\sqrt{3}$ (۴) $\sqrt{30}$

۳۵- شعاع‌های دو دایره هم‌مرکز ۳ و ۵ است. از نقطه A روی دایره بزرگ‌تر، دو وتر AE و AF را مماس بر دایره کوچک‌تر رسم می‌کنیم. اندازه EF کدام است؟

- (۱) $8/1$ (۲) $9/6$ (۳) $6/4$ (۴) $7/2$



۳۶- در شکل روبه‌رو، مجموع اندازه‌های کمان‌های AB و CD برابر 180° است. اگر $AB = 8$ و $CD = 6$ باشد، آن‌گاه مجموع مساحت‌های نواحی رنگی، کدام است؟

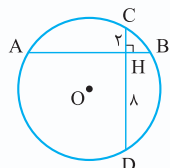
- (۱) $10\pi - 12$ (۲) $\frac{25\pi}{2} - 8$ (۳) $\frac{25\pi}{2} - 24$ (۴) $10\pi - 16$

۳۷- در یک دایره، نقطه C روی وتر AB آن را به دو پاره‌خط به طول‌های ۲ و ۱۴ سانتی‌متری تقسیم کرده است. اگر فاصله این نقطه تا مرکز دایره ۱۰ سانتی‌متر باشد، آن‌گاه مساحت دایره کدام است؟

- (۱) 72π (۲) 128π (۳) 64π (۴) 108π

۳۸- فاصله وسط کمان نظیر وتر به طول ۲۴ در یک دایره از انتهای این وتر برابر ۱۳ است. فاصله دورترین نقطه دایره از انتهای این وتر کدام است؟

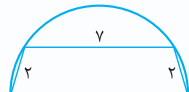
- (۱) $28/8$ (۲) $21/2$ (۳) $33/8$ (۴) $32/5$



۳۹- در شکل مقابل، O مرکز دایره است و دو وتر AB و CD بر هم عمودند، اگر $CH = 2$ ، $DH = 8$ و شعاع دایره $r = 3\sqrt{5}$ باشد، اندازه وتر AB کدام است؟

- (۱) ۱۱ (۲) ۸ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

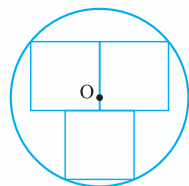
۴۰- مطابق شکل، یک دوزنقه متساوی‌الساقین با قاعده کوچک ۷ و ساق‌های ۲ در یک نیم‌دایره محاط شده است. قطر نیم‌دایره کدام است؟



- (۱) ۱۶ (۲) ۱۲ (۳) ۱۰ (۴) ۸

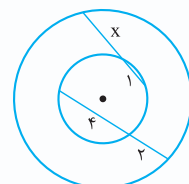
۴۱- دوزنقه متساوی‌الساقینی با قاعده‌های ۱۲ و ۱۶ در یک دایره به شعاع ۱۰، محاط است. اگر مرکز دایره خارج دوزنقه باشد. آن‌گاه مساحت دوزنقه کدام است؟

- (۱) ۲۸ (۲) ۵۶ (۳) ۲۷ (۴) ۵۴



۴۲- در شکل مقابل، O مرکز دایره است و مربع‌ها به ضلع ۱۶ سانتی‌مترند. مساحت دایره چند برابر π است؟

- (۱) ۴۲۵ (۲) ۳۶۱ (۳) ۴۴۱ (۴) ۴۷۵



۴۳- در شکل مقابل، دو دایره هم‌مرکزند. با توجه به اندازه‌های داده‌شده x کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

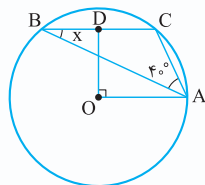


۴۴- دو دایره هم‌مرکزند. وتری به طول $2\sqrt{3}$ از دایره بزرگ بر دایره کوچک مماس است و وتری به طول ۶، دایره کوچک را قطع می‌کند. طول وتر ایجادشده در دایره کوچک کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{7}$ (۲) $2\sqrt{6}$ (۳) ۵ (۴) ۴

۴۵- دو دایره هم‌مرکزند. اندازه وتری از دایره بزرگ تر که بر دایره کوچک تر مماس است ۳۲ می‌باشد. اگر کمترین فاصله نقاط روی دو دایره ۸ باشد، آن گاه شعاع دایره کوچک تر کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۹ (۴) ۱۴



۴۶- در شکل مقابل، O مرکز دایره و D وسط وتر BC است. x کدام است؟

- (۱) ۵۰ (۲) ۴۵ (۳) ۲۵ (۴) ۲۰

۴۷- دایره‌ای به شعاع ۱۰ و وتر AB از آن مفروض‌اند. دورترین نقطه دایره از این وتر با طول وتر برابر است. فاصله مرکز دایره از این وتر کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۴۸- در مثلث ABC، $AC > AB$ ، O مرکز دایره محیطی مثلث ABC و M پای میانه رأس A است. اگر $\hat{AOM} = 90^\circ$ و $\hat{A} = 20^\circ$ باشد، آن گاه اندازه $\hat{B}$ چند درجه است؟

- (۱) 100° (۲) 115° (۳) 125° (۴) 130°

۴۹- در مثلث ABC، O مرکز دایره محیطی و D و M به ترتیب پای نیمساز و میانه رأس A می‌باشند. AD را امتداد می‌دهیم تا دایره محیطی را در A' قطع کند. می‌دانیم AM میانه رأس A در مثلث AA'O است، زاویه A چند درجه است؟

- (۱) 45° (۲) 30° (۳) 60° (۴) 90°

۵۰- نقطه ثابت M در دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۳، به فاصله $2\sqrt{2}$ از مرکز دایره قرار دارد. وتر دلخواه EF از M می‌گذرد، کمترین محیط مثلث EOF کدام است؟

- (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۰

۵۱- دو دایره به مرکز A و شعاع‌های ۵ و ۷ مفروض‌اند. با فرض $AB = 5$ ، اگر C نقطه‌ای روی دایره بزرگ تر باشد به طوری که اندازه زاویه $\hat{ACB}$ ماکسیمم باشد، آن گاه مساحت مثلث ABC کدام است؟

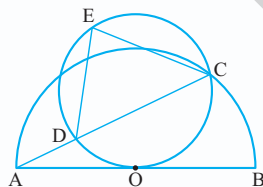
- (۱) $5\sqrt{6}$ (۲) $\frac{35}{3}$ (۳) $\frac{35}{4}$ (۴) $6\sqrt{5}$

زاویه محاطی و ظلی و زاویه برخورد و ترها

۵۲- در مثلث ABC، $\hat{B} = 70^\circ$ ، $\hat{C} = 30^\circ$ است. اگر O مرکز دایره محیطی مثلث و D نقطه وسط کمان نظیر ضلع BC باشد، آن گاه زاویه AOD چند درجه است؟

- (۱) 120° (۲) 140° (۳) 150° (۴) 130°

۵۳- در شکل زیر، دایره در نقطه O بر مرکز نیم دایره با قطر BA مماس است. اگر اندازه زاویه A برابر 26° باشد، آن گاه اندازه زاویه E چند درجه است؟



- (۱) ۷۴ (۲) ۸۴ (۳) ۷۸ (۴) ۸۰

۵۴- در مثلث ABC، $\hat{A} = 72^\circ$ ، دایره محیطی مثلث را رسم می‌کنیم. وسط کمان‌های نظیر اضلاع AB و AC را به ترتیب D و E می‌نامیم. زاویه بین دو وتر DE و AC در این دایره چند درجه است؟

- (۱) 48° (۲) 50° (۳) 44° (۴) 54°

۵۵- در دایره‌ای به قطر AB، نقطه M روی دایره قرار دارد، به طوری که $\hat{MAB} = 50^\circ$ ، اندازه زاویه ظلی که رأس آن، نقطه M است، چند درجه است؟

- (۱) 25° (۲) 45° (۳) 40° (۴) 30°



دایره



۵۶- در مثلث متساوی الساقین ABC ، $AB = AC$ خط‌های مماس بر دایره محیطی مثلث در نقاط A و B ، یکدیگر را با زاویه 50° قطع می‌کنند. اندازه زاویه رأس مثلث چند درجه است؟

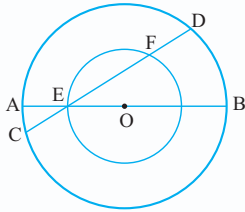
- (۱) 35° (۲) 40° (۳) 45° (۴) 50°

۵۷- زاویه محاطی $\widehat{BAC} = 38^\circ$ در یک دایره مفروض است. دو خط مماس بر دایره در نقاط B و C با چه زاویه‌ای متقاطع‌اند؟

- (۱) 108° (۲) 120° (۳) 105° (۴) 104°

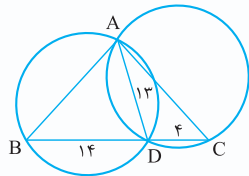
۵۸- در دو دایره هم‌مرکز، قطر AB دایره کوچک را در نقطه E قطع کرده است. وتر CD در دایره بزرگ از E می‌گذرد و دایره کوچک را در F قطع می‌کند به طوری که $\widehat{AC} + \widehat{EF} = 104^\circ$. اندازه کمان BD چند درجه است؟

- (۱) 84°
(۲) 86°
(۳) 82°
(۴) 76°



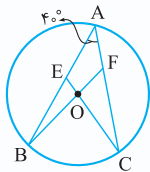
۵۹- در شکل مقابل، دو دایره مساوی‌اند و $CD = 4$ ، $AD = 13$ و $BD = 14$. مساحت مثلث ABC کدام است؟

- (۱) 96
(۲) 72
(۳) 128
(۴) 108



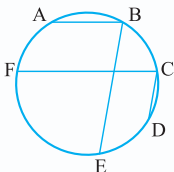
۶۰- در شکل روبه‌رو، O مرکز دایره و $\hat{A} = 40^\circ$ است، حاصل $\widehat{BEC} + \widehat{BFC}$ چند درجه است؟

- (۱) 80° (۲) 120° (۳) 160° (۴) 200°



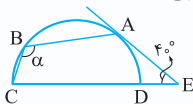
۶۱- در شکل زیر، اگر $AB \parallel FC$ ، $CD \parallel BE$ و $\widehat{AB} = 60^\circ$ ، $\widehat{CD} = 40^\circ$ و $\widehat{EF} = 110^\circ$ باشد، آن‌گاه زاویه $\widehat{FCD}$ چند درجه است؟

- (۱) 90° (۲) 55° (۳) 70° (۴) 80°



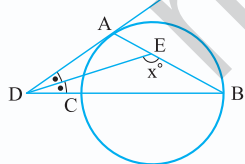
۶۲- در شکل زیر، E روی امتداد قطر CD قرار دارد. اگر EA بر نیم‌دایره مماس باشد و $\hat{E} = 40^\circ$ ، آن‌گاه مقدار α کدام است؟

- (۱) 105° (۲) 110° (۳) 115° (۴) 120°



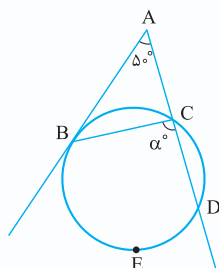
۶۳- در شکل زیر، BC قطر دایره و AD بر دایره مماس است. اگر DE نیمساز زاویه $\hat{D}$ باشد، مقدار x کدام است؟

- (۱) 105° (۲) 120° (۳) 135° (۴) 130°



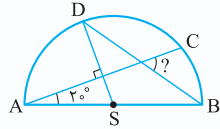
۶۴- در شکل روبه‌رو، $\hat{A} = 50^\circ$ و AB بر دایره مماس است. اگر $\widehat{BED} = 2\widehat{CD}$ ، آن‌گاه α کدام است؟

- (۱) 102° (۲) 84° (۳) 92° (۴) 74°





۶۵- AB قطر نیم‌دایره‌ای به مرکز S است. اگر $\hat{A} = 20^\circ$ و $AC \perp DS$ ، آن‌گاه اندازه زاویه‌ای که با علامت سؤال نشان



داده شده، کدام است؟

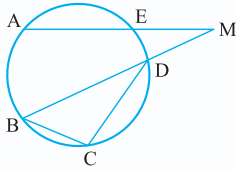
(۲) 55°

(۱) 45°

(۴) 72°

(۳) 60°

۶۶- در دایره روبه‌رو، $\widehat{AE} = (4x)^\circ$ ، $\widehat{M} = \widehat{DE} = x^\circ$ و $\widehat{BCD} = 100^\circ$. مقدار x کدام است؟



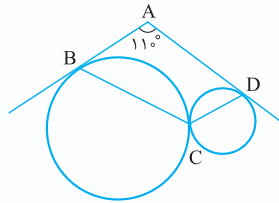
(۱) ۱۵

(۲) ۲۴

(۳) ۳۶

(۴) ۲۵

۶۷- مطابق شکل، دو دایره در نقطه C مماس خارج‌اند و AB و AD بر دو دایره مماس‌اند. اگر $\hat{A} = 11^\circ$ ، آن‌گاه اندازه زاویه BCD چند درجه است؟



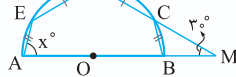
(۱) 135°

(۲) 125°

(۳) 120°

(۴) 130°

۶۸- در شکل روبه‌رو، AB قطر نیم‌دایره و $AE = BC$ ، $CD = ED$ و $\hat{M} = 30^\circ$ است. مقدار x کدام است؟



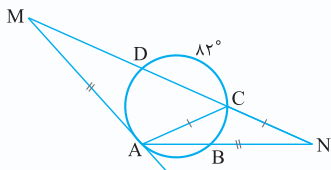
(۲) 75°

(۱) 60°

(۴) 65°

(۳) 80°

۶۹- در شکل زیر، $\widehat{CD} = 82^\circ$ ، $AC = CN$ ، $AM = AN$ و MA بر دایره مماس است. اندازه زاویه $\hat{M}$ کدام است؟



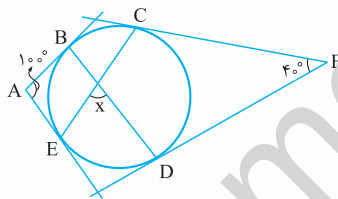
(۱) $33/6^\circ$

(۲) $25/6^\circ$

(۳) $32/1^\circ$

(۴) $27/8^\circ$

۷۰- در شکل زیر، از نقاط A و F بر دایره مماس رسم شده است. اگر $\hat{A} = 100^\circ$ و $\hat{F} = 40^\circ$ ، آن‌گاه اندازه زاویه برخورد دو وتر BD و CE کدام است؟



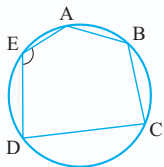
(۱) 70°

(۲) 60°

(۳) 80°

(۴) 50°

۷۱- در شکل مقابل، $\frac{AB}{1} = \frac{BC}{\sqrt{2}} = \frac{CD}{\sqrt{3}} = R$ (شعاع دایره است)، اندازه زاویه E چند درجه است؟



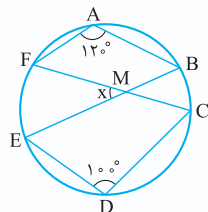
(۱) 120°

(۲) 135°

(۳) 110°

(۴) 150°

۷۲- در شکل مقابل، مقدار x کدام است؟



(۱) 30°

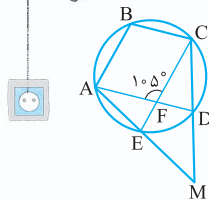
(۲) 45°

(۳) 35°

(۴) 40°



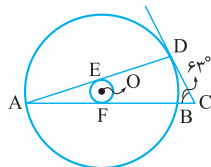
دایره



۷۳- در شکل مقابل، $ABCF$ متوازی‌الاضلاع است. اندازه زاویه M چند درجه است؟

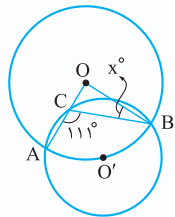
- (۱) 30°
(۲) 40°
(۳) 45°
(۴) 35°

۷۴- در شکل مقابل، دو دایره هم‌مرکز و اضلاع زاویه A بر دایره کوچک تر مماس‌اند و مماس بر دایره در نقطه D . یک ضلع زاویه A را با زاویه 63° قطع می‌کند. اندازه زاویه A کدام است؟



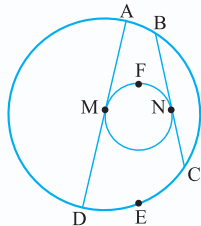
- (۱) 12°
(۲) 10°
(۳) 15°
(۴) 18°

۷۵- در شکل زیر، O مرکز دایره بزرگ است و O' مرکز دایره کوچک، روی دایره بزرگ قرار دارد. مقدار x کدام است؟



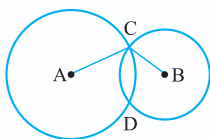
- (۱) 26°
(۲) 27°
(۳) 28°
(۴) 29°

۷۶- در شکل زیر، وترهای BC و AD از دایره بزرگ بر دایره کوچک مماس‌اند. اگر $\widehat{MFN} = 154^\circ$ و $\widehat{DEC} = 70^\circ$ ، آنگاه اندازه کمان کوچک $\widehat{AB}$ چند درجه است؟



- (۱) 15°
(۲) 16°
(۳) 17°
(۴) 18°

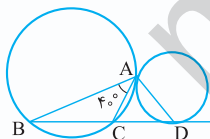
۷۷- در شکل زیر، دو دایره به مراکز A و B در نقاط C و D متقاطع‌اند. اگر $\widehat{ACB} = 150^\circ$ باشد، آنگاه مجموع اندازه‌های کمان‌های کوچک CD



در دو دایره کدام است؟

- (۱) 45°
(۲) 30°
(۳) 60°
(۴) 75°

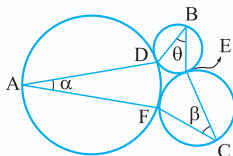
۷۸- در شکل زیر، دو دایره، مماس خارج‌اند و خط مماس بر دایره کوچک در نقطه D . دایره بزرگ را در نقاط B و C قطع کرده است.



اگر $\widehat{BAC} = 40^\circ$ ، آنگاه اندازه زاویه CAD کدام است؟

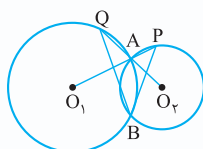
- (۱) 60°
(۲) 70°
(۳) 50°
(۴) 80°

۷۹- در شکل مقابل، دایره‌ها دوه‌دو بر هم مماس‌اند. حاصل $\alpha + \beta + \theta$ کدام است؟



- (۱) 45°
(۲) 90°
(۳) 120°
(۴) 180°

۸۰- مطابق شکل، دو دایره در نقاط A و B متقاطع‌اند. اگر $\widehat{PAQ} = 110^\circ$ ، آنگاه اندازه زاویه PBQ چند درجه است؟



- (۱) 30°
(۲) 35°
(۳) 40°
(۴) 45°



۸۱- دو دایره متقاطع در نقطه A مشترک اند. خط گذرا بر A دو دایره مفروض را در دو نقطه B و C قطع می کند. مماس ها بر هر دایره در B و C در نقطه M متقاطع اند. در مثلث MBC با چرخش خط قاطع، کدام جزء ثابت می ماند؟

(سراسری ریاضی فارج کشور ۹۴)

(۴) زاویه $\widehat{BMC}$

(۳) مساحت

(۲) محیط

(۱) MA

(سراسری ریاضی ۹۳)

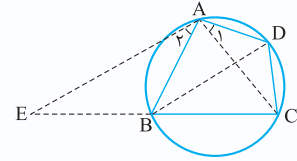
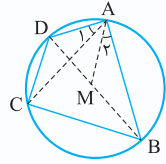
۸۲- در شکل زیر، $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$. حاصل $AD \cdot BC$ برابر کدام است؟

(۱) $DM \cdot AC$

(۲) $BM \cdot AC$

(۳) $AB \cdot CD$

(۴) $BD \cdot BM$



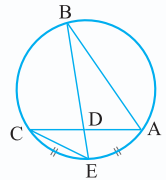
۸۳- در شکل مقابل، $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$. حاصل $BD \cdot AC$ کدام است؟

(۱) $AD \cdot CE$

(۲) $AE \cdot CD$

(۳) $AE \cdot BC$

(۴) $CD \cdot CE$



۸۴- در شکل روبه رو، $\widehat{AE} = \widehat{CE}$ و $AD = 2/4$ ، $BE = 8$ ، $AB = 6$. اندازه CE کدام است؟

(۱) $3/6$

(۲) $3/2$

(۳) $3/8$

(۴) 3

(سراسری ریاضی فارج از کشور ۹۳)

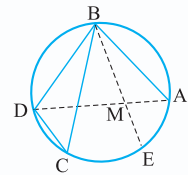
۸۵- در شکل زیر، $\widehat{AE} = \widehat{CD}$ و $CD = 3$ ، $BC = 8$ ، $AB = 6$. اندازه AM کدام است؟

(۱) 2

(۲) $2/25$

(۳) $2/5$

(۴) $2/75$



۸۶- دو دایره مساوی C و C' به شعاع ۲، مماس خارج اند. دایره C'' با کوچک ترین قطر بر هر دو دایره C و C' مماس داخل می باشد. اندازه وتر C'' که بر هر دو دایره C و C' مماس است، کدام است؟

(۴) 6

(۳) $2\sqrt{3}$

(۲) 4

(۱) $4\sqrt{3}$

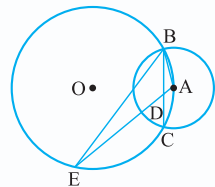
۸۷- دو دایره به مرکزهای A و O در نقاط B و C متقاطع اند و مرکز دایره کوچک روی دایره بزرگ قرار دارد. اگر $AD = 4$ و $DE = 12$ ، آن گاه شعاع دایره کوچک کدام است؟

(۱) 9

(۲) 8

(۳) 6

(۴) 12



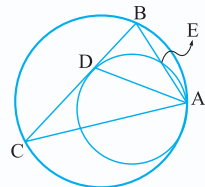
۸۸- در شکل مقابل، دو دایره در نقطه A مماس داخل هستند و وتر BC در نقطه D بر دایره کوچک تر مماس می باشد. اگر $AC = b$ و $AE = m$ باشد، آن گاه طول پاره خط AD کدام است؟

(۲) $\sqrt{bm}$

(۱) $\frac{b+m}{2}$

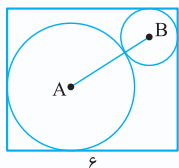
(۴) $2\sqrt{bm}$

(۳) $\frac{b+2m}{3}$





دایره



۸۹- در شکل مقابل، ابعاد مستطیل ۵ و ۶ و شعاع دایره به مرکز B برابر یک است و دو دایره مماس خارج‌اند و بر اضلاع مستطیل مماس‌اند. شعاع دایره بزرگ کدام است؟

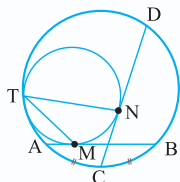
$$۲\sqrt{۱۵} - ۵ \quad (۲)$$

$$۱۰ - ۲\sqrt{۱۵} \quad (۱)$$

$$۵ - \sqrt{۱۵} \quad (۴)$$

$$۱۲ - ۲\sqrt{۱۵} \quad (۳)$$

۹۰- چهار نقطه A، B، C و D طوری روی دایره بزرگ قرار دارند که $\widehat{AB} = \widehat{BD} = ۲\widehat{AC} = ۶۰^\circ$. دایره کوچک‌تر در نقطه T بر دایره بزرگ‌تر و در



نقاط M و N بر وترهای AB و CD مماس است. اندازه زاویه MTN کدام است؟

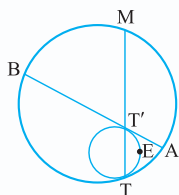
$$۳۰^\circ \quad (۱)$$

$$۲۲/۵^\circ \quad (۲)$$

$$۲۷/۵^\circ \quad (۳)$$

$$۱۵^\circ \quad (۴)$$

۹۱- دو دایره C و C' در نقطه T مماس داخل‌اند و وتر AB از دایره C در نقطه T' بر دایره C' مماس است. اگر امتداد TT'، دایره C را در نقطه M قطع کند، با فرض این که $\widehat{AT} = ۸۰^\circ$ و $\widehat{TET'} = ۱۲۰^\circ$ باشد، اندازه کمان AM چند درجه است؟



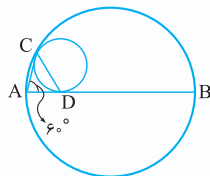
$$۳۰^\circ \quad (۱)$$

$$۳۵^\circ \quad (۲)$$

$$۴۵^\circ \quad (۳)$$

$$۴۰^\circ \quad (۴)$$

۹۲- در شکل زیر، AB قطر دایره بزرگ و دایره کوچک بر AB در نقطه D مماس و با دایره بزرگ در نقطه C مماس داخل است. اگر $\hat{A} = ۶۰^\circ$ باشد، آن‌گاه اندازه زاویه BDC چند درجه است؟



$$۱۲۰^\circ \quad (۲)$$

$$۱۳۵^\circ \quad (۱)$$

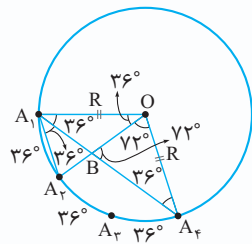
$$۱۰۸^\circ \quad (۴)$$

$$۱۰۵^\circ \quad (۳)$$



پاسخ نامه نشریحی

۱- گزینه ۲



پس $\angle A_1OA_4 = 72^\circ$ و در نتیجه
 $\angle A_2OA_4 = 36^\circ$ و اندازه زوایا
 مطابق شکل می شود:
 $A_1A_4 = A_1A_2 + A_2A_4$
 $\Rightarrow b = A_1A_2 + OA_4$
 $\Rightarrow A_1A_2 = b - R$

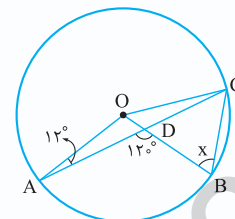
$$3x^2 - 7Rx + 4R^2 = 0 \Rightarrow (x - R)(3x - 4R) = 0$$

$$\Rightarrow x = R \text{ یا } x = \frac{4R}{3}$$

بنابراین یکی از نقاط روی دایره و دیگری بیرون آن قرار دارد.

۲- گزینه ۲

O را به C وصل می کنیم، مثلث OAC
 متساوی الساقین است ($OA = OC$)، پس $\angle OCA = 12^\circ$ و در
 مثلث OCD داریم:



$$12^\circ + 12^\circ + \angle BOC = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle BOC = 156^\circ$$

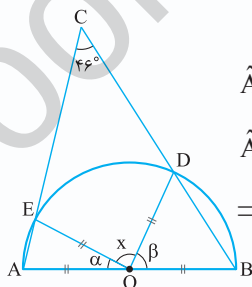
$$OB = OC \Rightarrow \angle OCB = \angle B = x$$

و نهایتاً در مثلث OBC داریم:

$$x + x + 156^\circ = 180^\circ \Rightarrow 2x = 24^\circ \Rightarrow x = 12^\circ$$

۳- گزینه ۴

در مثلث های متساوی الساقین
 AOE و DOB داریم:



$$\hat{A} = \frac{180^\circ - \alpha}{2}, \hat{B} = \frac{180^\circ - \beta}{2}$$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{180^\circ - \alpha}{2} + \frac{180^\circ - \beta}{2} + 46^\circ = 180^\circ$$

$$36^\circ - \alpha - \beta + 92^\circ = 36^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 92^\circ$$

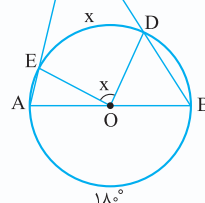
$$\alpha + \beta + x = 180^\circ \Rightarrow x = 180^\circ - 92^\circ = 88^\circ$$

روش دوم: $\angle DOE$ زاویه مرکزی است، پس اندازه کمان DE برابر x

است، اما بنا به زاویه تقاطع امتداد دو وتر دایره، داریم:

$$\hat{C} = \frac{\widehat{AB} - \widehat{DE}}{2} \Rightarrow 46^\circ = \frac{180^\circ - x}{2}$$

$$x = 180^\circ - 2 \times 46^\circ = 180^\circ - 92^\circ = 88^\circ$$



۴- گزینه ۱

مثلث A_1OA_4 متساوی الساقین با زاویه
 رأس 108° است، پس $\angle A_1OA_4 = \angle A_1A_4O = 36^\circ$ از طرفی در
 مثلث متساوی الساقین OA_1A_2 اندازه زاویه رأس 36° است.

۵- گزینه ۳ با فرض $\hat{B} = \hat{C} = \alpha$ در مثلث

متساوی الساقین AOB بنا به زاویه خارجی، داریم $\angle AOC = 2\alpha$.
 شعاع گذرنده بر نقطه تماس بر خط مماس عمود است

پس $\angle OAC = 90^\circ$ و داریم:

$$\alpha + 2\alpha = 90^\circ \Rightarrow 3\alpha = 90^\circ$$

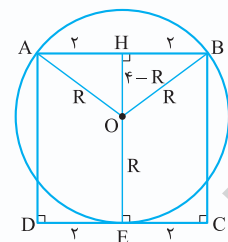
$$\Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

$$\Rightarrow \begin{cases} OA = \frac{OC}{2} \\ AC = \frac{\sqrt{3}}{2} OC \end{cases}$$

$$\Rightarrow AC = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 \times OA = \sqrt{3} OA$$

۶- گزینه ۲ مرکز دایره روی عمودمنصف AB که همان

عمودمنصف CD است، قرار دارد. در مثلث قائم الزویه AOH داریم:



$$OA^2 = AH^2 + OH^2$$

$$\Rightarrow R^2 = 2^2 + (4 - R)^2$$

$$\Rightarrow R^2 = 4 + 16 - 8R + R^2$$

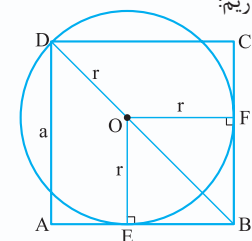
$$\Rightarrow 8R = 20$$

$$\Rightarrow R = \frac{20}{8} = \frac{5}{2} = 2.5$$

۷- گزینه ۱ مرکز دایره روی قطر مربع قرار دارد، زیرا O از دو

ضلع AB و BC به یک فاصله است. چهارضلعی BEOF مربع است

و قطر آن برابر است با $OB = r\sqrt{2}$ و داریم:



$$BD = OB + OD$$

$$\Rightarrow a\sqrt{2} = r\sqrt{2} + r$$

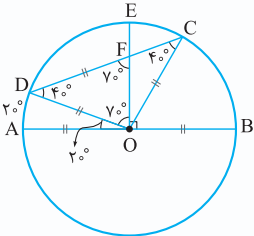
$$\Rightarrow r = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1}$$

$$\Rightarrow r = a\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)$$

$$= a(2 - \sqrt{2}) = (2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2}) = 4 - 2 = 2$$



دایره



پس $\hat{C} = 40^\circ$ و بنا به زاویه
خارجی در مثلث OFC نتیجه
می‌شود $\hat{COE} = 30^\circ$ و در
نتیجه $\widehat{CE} = 30^\circ$.

۱۳- گزینه ۲ بنا به فرض $OE = DE$ و $AB = 2CE$ است

پس $CE = OC = OD$. اگر $\hat{D} = \alpha$ ، آن‌گاه زوایا برحسب α
مطابق شکل زیر می‌شود. در نتیجه:

$$\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 5\alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 36^\circ$$

$$\widehat{CD} = 108^\circ \xrightarrow{\text{زاویه مرکزی}} \widehat{COD} = 3\alpha = 3 \times 36^\circ = 108^\circ$$

۱۴- گزینه ۴ قطر مربع همان شعاع دایره است، اگر ضلع مربع

را x فرض کنیم، داریم: $OD = OB = x\sqrt{2}$ و در نتیجه:

$$12^2 = x^2 + (x\sqrt{2})^2$$

$$\Rightarrow 3x^2 = 144$$

$$\Rightarrow x^2 = 48 \Rightarrow x = 4\sqrt{3}$$

۱۵- گزینه ۳ مطابق شکل $OU = OS - US = 5 - 2 = 3$ و

در مثلث قائم‌الزاویه OUV نتیجه می‌شود $UV = 4$ و به کمک
قضیه تالس یا تشابه داریم:

$$\frac{\triangle OUR}{\triangle OST} \Rightarrow \frac{OU}{OS} = \frac{UR}{TS}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{4+2}{TS}$$

$$\Rightarrow TS = \frac{30}{3} = 10$$

۱۶- گزینه ۱ اندازه وتر

مثلث قائم‌الزاویه ABC
برابر $BC = 5$ است و داریم:

$$S_{(ABC)} = \frac{1}{2} AH \times BC = \frac{1}{2} AB \times AC \Rightarrow AH = \frac{3 \times 4}{5} = \frac{12}{5}$$

$$\triangle AEF \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{AK}{AH} = \frac{EF}{BC} \Rightarrow \frac{AH - KH}{AH} = \frac{EF}{BC}$$

$$\frac{\frac{12}{5} - r}{\frac{12}{5}} = \frac{2r}{5} \Rightarrow \frac{12 - 5r}{12} = \frac{2r}{5}$$

$$\Rightarrow 60 - 25r = 24r \Rightarrow r = \frac{60}{49}$$

۸- گزینه ۲ بنا به فرض

$AB = 2CD$ در نتیجه

$OD = OC = CD$ ، یعنی مثلث

OCD متساوی‌الاضلاع است.

پس $\widehat{CD} = 60^\circ$ و داریم:

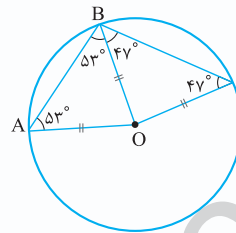
$$\widehat{AD} + \widehat{CD} + \widehat{BC} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{AD} = 180^\circ - 60^\circ - 47^\circ = 73^\circ$$

$$\widehat{AOD} = \widehat{AD} = 73^\circ$$

۹- گزینه ۲ شعاع OB را

رسم می‌کنیم، در چهارضلعی

ABCO داریم:



$$\widehat{AOC} + 53^\circ + 53^\circ + 47^\circ + 47^\circ = 360^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{AOC} = 116^\circ$$

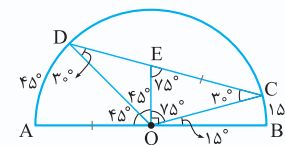
۱۰- گزینه ۳ زاویه مرکزی BOC برابر 15° است،

پس $\hat{COE} = 75^\circ$. چون مثلث OCE متساوی‌الساقین است دو

زاویه دیگر آن 30° و 75° می‌شود، به دلیل متساوی‌الساقین بودن

مثلث COD، داریم: $\hat{D} = 30^\circ$ و $\hat{DOE} = 75^\circ - 30^\circ = 45^\circ$

نهایتاً $\widehat{AD} = \widehat{AOD} = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$.



۱۱- گزینه ۳ بنا به فرض، CE با شعاع دایره برابر است،

شعاع OC را رسم می‌کنیم، مثلث OCE متساوی‌الساقین است

پس $\hat{EOC} = \hat{E} = 18^\circ$ و بنا به زاویه خارجی داریم: $\widehat{OCD} = 36^\circ$.

اما مثلث OCD متساوی‌الساقین است

پس $\hat{D} = 36^\circ$ و نهایتاً به کمک زاویه

خارجی در مثلث DOE داریم:

$$\widehat{AOD} = \hat{D} + \widehat{OED} = 36^\circ + 18^\circ = 54^\circ \Rightarrow \widehat{AD} = 54^\circ$$

۱۲- گزینه ۱ زاویه مرکزی $\widehat{AOD}$ برابر 20° است

پس $\hat{DOE} = 70^\circ$ و در مثلث متساوی‌الساقین ODF دو زاویه

دیگر 70° و 40° است. مثلث ODC متساوی‌الساقین است

پس $\hat{DOC} = 40^\circ$ و $\hat{COE} = 70^\circ$ و $\hat{EOA} = 70^\circ$ و $\hat{AOB} = 70^\circ$ و $\hat{BOC} = 70^\circ$ و $\hat{COD} = 40^\circ$ و $\hat{DOA} = 20^\circ$.



$$\begin{aligned} \Rightarrow \hat{A}CH = 45^\circ &\Rightarrow \hat{C}AH = 45^\circ \Rightarrow AH = CH \\ AH^2 + CH^2 &= AC^2 \Rightarrow 2AH^2 = 2CH^2 = (6\sqrt{2})^2 \\ \Rightarrow AH = CH &= 6 \\ AB^2 &= AH^2 + BH^2 = 6^2 + (6+2)^2 = 6^2 + 8^2 = 10^2 \\ \Rightarrow AB &= 10 \\ AB^2 &= R^2 + R^2 \Rightarrow 10^2 = 2R^2 \Rightarrow R = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2} \end{aligned}$$

گزینه ۲۱

$$\begin{cases} x^2 + (25-y)^2 = 30^2 \\ x^2 + y^2 = 25^2 \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} (25-y)^2 - y^2 = 30^2 - 25^2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (25-y+y)(25-y-y) &= (30^2 - 25^2) \\ \Rightarrow 25(25-2y) &= 5 \times 55 \Rightarrow 25-2y = 11 \Rightarrow y = 7 \\ x^2 + 7^2 &= 25^2 \Rightarrow x^2 = 25^2 - 7^2 = 24^2 \Rightarrow x = 24 \end{aligned}$$

گزینه ۲۲

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \frac{\widehat{BC} - \widehat{DE}}{2} \\ \Rightarrow 45^\circ &= \frac{180^\circ - \widehat{DE}}{2} \\ \Rightarrow \widehat{DE} &= 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ \\ \Rightarrow \widehat{DOE} &= 90^\circ \\ \Rightarrow DE^2 &= OE^2 + OD^2 \\ \Rightarrow DE^2 &= 6^2 + 6^2 = 2 \times 6^2 \Rightarrow DE = 6\sqrt{2} \end{aligned}$$

گزینه ۲۳

رسم ربع دایره را به صورت نیم دایره به قطر BE رسم می کنیم. چون زاویه C قائمه است، پس امتداد ضلع CD از انتهای قطر BE، یعنی نقطه E می گذرد. شعاع ربع دایره برابر ۲۰ است. بنا به قضیه فیثاغورس داریم: $DE = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25$ و دو مثلث قائم الزاویه ODE و CBE متشابه اند:

$$\begin{aligned} \triangle ODE \sim \triangle CBE &\Rightarrow \frac{DE}{BE} = \frac{OE}{CE} \\ \Rightarrow \frac{25}{40} = \frac{20}{CE} &\Rightarrow CE = \frac{160}{25} = 32 \\ \Rightarrow DE + CD &= 32 \Rightarrow 25 + x = 32 \Rightarrow x = 7 \end{aligned}$$

گزینه ۱۷ مطابق شکل چهارضلعی های O_1KO_2C و O_1KO_2A همگی لوزی هستند، در نتیجه:

$$\begin{aligned} \widehat{O_1KO_2} &= \alpha + \gamma \\ \widehat{O_1KO_2} + \widehat{KO_2A} &= 180^\circ \\ \Rightarrow \alpha + \gamma + \beta &= 180^\circ \end{aligned}$$

و با توجه به این که α و β و γ زوایای مرکزی اند، نتیجه می شود:

$$\widehat{CK} + \widehat{KE} + \widehat{AK} = 180^\circ$$

گزینه ۱۸ در مثلث متساوی الساقین OBD داریم $\alpha = \beta$. بر دایره مماس است، پس زاویه ABO قائمه است که نتیجه می دهد $\hat{ABC} = 90^\circ - \alpha$ اما مثلث ABC متساوی الساقین است، پس می توان نوشت:

$$\begin{aligned} \hat{ACB} = \hat{ABC} &= 90^\circ - \alpha \Rightarrow \hat{OCD} = 90^\circ - \alpha \\ \triangle OCD: \hat{OCD} + \hat{ODC} + \hat{COD} &= 180^\circ \\ \Rightarrow 90^\circ - \alpha + \beta + \hat{COD} &= 180^\circ \Rightarrow \hat{COD} = 90^\circ \end{aligned}$$

گزینه ۱۹ مثلث ABC متساوی الساقین است (AB = AC). داریم:

$$\begin{aligned} \hat{C} &= \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ \\ BC = BE &\Rightarrow \hat{BEC} = \hat{C} = 70^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{BEC} = \hat{EBA} + \hat{A} &\Rightarrow \hat{EBA} = 70^\circ - 40^\circ = 30^\circ \\ BE = BD &\Rightarrow \hat{BDE} = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ \\ \hat{ADE} &= 180^\circ - \hat{BDE} = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ \end{aligned}$$

گزینه ۲۰ در مثلث های متساوی الساقین OAC و OBC داریم:

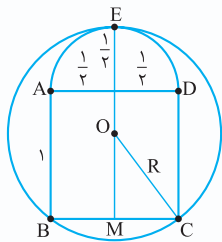
$$\begin{aligned} \hat{ACB} &= \hat{OCA} + \hat{OCB} \\ &= \frac{180^\circ - \hat{AOC}}{2} + \frac{180^\circ - \hat{BOC}}{2} \\ &= \frac{360^\circ - 90^\circ}{2} = 135^\circ \end{aligned}$$



دایره

۲۷- گزینه ۱ مرکز دایره از نقاط B و C به یک فاصله است،

پس روی عمود منصف ضلع BC قرار دارد. ME برابر ضلع مربع به علاوه قطر نیم دایره است، یعنی:



$$OM = ME - OE = \frac{3}{2} - R$$

$$OC^2 = OM^2 + MC^2$$

$$\Rightarrow R^2 = \left(\frac{3}{2} - R\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

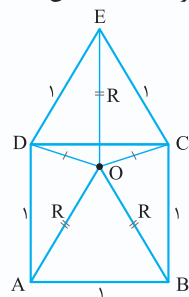
$$\Rightarrow R^2 = \frac{9}{4} - 3R + R^2 + \frac{1}{4} \Rightarrow R = \frac{5}{6}$$

۲۸- گزینه ۱ مرکز دایره ای که از نقاط A، B و E می‌گذرد، روی

عمود منصف AB قرار دارد، پس OC = OD. دو مثلث OEC و OBC به حالت (ضضض) همبخت‌اند، در نتیجه

$$\angle OCE = \angle OCB = \frac{90^\circ + 60^\circ}{2} = 75^\circ$$

$$\angle DEO = \angle OEC = 30^\circ$$



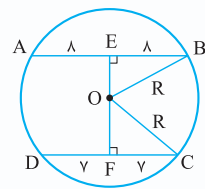
$$\angle DOE = \angle COE = 75^\circ$$

پس مثلث‌های ODE، OCE، ODA و OCB همبخت و متساوی الساقین با زاویه

رأس ۳۰° هستند، در نتیجه R = ۱ است.

۲۹- گزینه ۱ فرض کنیم OE = x، در این صورت

OF = 5 - x است و داریم:



$$OB^2 = BE^2 + OE^2$$

$$OC^2 = OF^2 + CF^2$$

$$\xrightarrow{OB=OC=R} R^2 + x^2 = (5-x)^2 + 7^2$$

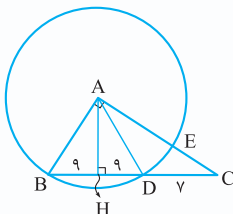
$$\Rightarrow 64 + x^2 = 25 + x^2 - 10x + 49$$

$$10x = 10 \Rightarrow x = 1$$

$$S_{\text{دایره}} = \pi R^2 = \pi(64 + x^2) = \pi(64 + 1) = 65\pi$$

۳۰- گزینه ۲ ارتفاع AH وتر BD در دایره را نصف می‌کند،

داریم:



$$AB^2 = BH \times BC$$

$$= 9 \times (18 + 7) = 9 \times 25$$

$$\Rightarrow AB = 3 \times 5 = 15$$

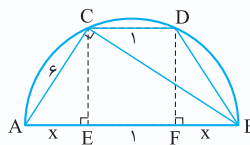
$$AC^2 = CH \times BC$$

$$= (9 + 7)(18 + 7) = 16 \times 25 \Rightarrow AC = 4 \times 5 = 20$$

$$CE = AC - AE = AC - AB = 20 - 15 = 5$$

۲۴- گزینه ۲ چون CD || AB است، پس BD = AC = 6

و دوزنقه ABDC متساوی الساقین است. در مثلث قائم الزاویه ABC بنا به روابط طولی داریم:



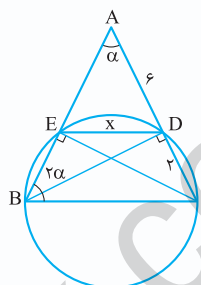
$$AC^2 = AE \times AB$$

$$\Rightarrow 6^2 = x \times (x + 1 + x)$$

$$\Rightarrow 2x^2 + x - 36 = 0 \Rightarrow (x - 4)(2x + 9) = 0$$

$$\xrightarrow{x > 0} x = 4 \Rightarrow AB = 2x + 1 = 9$$

پس شعاع دایره ۴/۵ است.



می‌دانیم در مثلثی که

یک زاویه، دو برابر زاویه دیگر باشد

($\hat{B} = 2\hat{A}$) آن گاه ضلع روبه‌رو به زاویه دو

برابر واسطه هندسی مجموع دو ضلع دیگر و

ضلع روبه‌رو به زاویه نصف است.

پس می‌توان نوشت:

$$AC^2 = (AB + BC) \times BC \Rightarrow a^2 = (c + a) \times a$$

در دو مثلث قائم الزاویه ADB و BDC داریم:

$$BD^2 = BC^2 - CD^2 = AB^2 - AD^2 \Rightarrow a^2 - 2^2 = c^2 - 6^2$$

$$\Rightarrow c^2 - a^2 = 36 - 4 = 32$$

$$\begin{cases} c^2 - a^2 = 32 \\ a \times (c + a) = 64 \end{cases} \xrightarrow{\text{تقسیم}} \frac{c - a}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2c - 2a = a \Rightarrow 2c = 3a \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{2}{3}$$

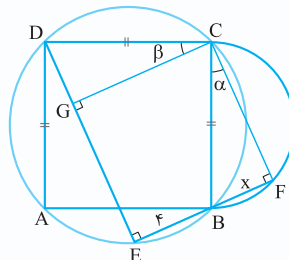
اما اگر در مثلث ABC دو ارتفاع BD و CE رسم شود، آن گاه

مثلث ADE با مثلث ABC متشابه است و داریم:

$$\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{6}{c} \Rightarrow x = \frac{6a}{c} = 6 \times \frac{2}{3} = 4$$

۲۶- گزینه ۳ زاویه DEB روبه‌رو به قطر BD در دایره است،

پس قائمه است.



هم‌چنین زاویه F نیز قائمه

است. عمود CG را رسم

می‌کنیم. دو زاویه α و β

برابری، زیرا زوایای GCF و

BCD قائمه هستند.

پس دو مثلث قائم الزاویه CDG و CBF به حالت یک ضلع و زاویه

حاده مجاور آن همبخت‌اند. در نتیجه CG = CF و این یعنی،

چهارضلعی EFGC مربع است و GD = BF = x و داریم:

$$GE = EF \Rightarrow DE - GD = BE + BF$$

$$\Rightarrow 10 - x = 4 + x \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$$



حال O را به M وصل می‌کنیم. دو مثلث قائم‌الزاویه OMF و OME همنهشت‌اند و داریم:

$$MF = \frac{\sqrt{3}}{2} OM \Rightarrow 3 = \frac{\sqrt{3}}{2} \times OM$$

$$\Rightarrow OM = 2\sqrt{3}$$

$$OF = \frac{OM}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

و نهایتاً در مثلث قائم‌الزاویه ODF، داریم:

$$R^2 = OF^2 + DF^2 = (\sqrt{3})^2 + 5^2 = 3 + 25 = 28$$

$$\Rightarrow R = 2\sqrt{7}$$

گزینه ۳۵ طول دو وتر AE و AF برابر است، زیرا فاصله مرکز دایره از آن‌ها برابر می‌باشد ($OM = ON = 3$) و با توجه به $OA = 5$ از قضیه فیثاغورس نتیجه می‌شود:

$$AM = AN = 4 \Rightarrow AE = AF = 8$$

$$\triangle OAM \sim \triangle EAH \Rightarrow \frac{OM}{EH} = \frac{OA}{AE}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{EH} = \frac{5}{8}$$

$$EH = \frac{24}{5} = 4.8 \Rightarrow EF = 2EH = 2 \times 4.8 = 9.6$$

گزینه ۳۶ وتر BE را مساوی وتر CD رسم می‌کنیم. مساحت قطعات نظیر وترهای BE و CD برابر است، مقدار آن‌ها را S و مساحت قطعه نظیر وتر AB را S' می‌نامیم، داریم:

$$\left. \begin{aligned} \widehat{AB} + \widehat{BE} &= \widehat{AB} + \widehat{CD} \\ (\text{فرض}) \widehat{AB} + \widehat{CD} &= 180^\circ \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \widehat{AB} + \widehat{BE} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{AE} = 180^\circ$$

پس AE قطر دایره است و بنا به قضیه فیثاغورس داریم:

$$AE^2 = 8^2 + 6^2 = 10^2 \Rightarrow AE = 10$$

$S + S' = (\text{مساحت مثلث ABE}) - (\text{مساحت نیم‌دایره})$

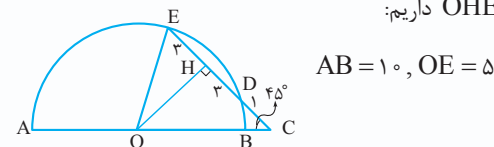
$$\Rightarrow S + S' = \frac{\pi \times 5^2}{2} - \frac{6 \times 8}{2} = \frac{25\pi}{2} - 24$$

گزینه ۳۷ عمود OH وتر AB را نصف می‌کند چون $AB = 16$ است، نتیجه می‌شود $AH = BH = 8$ و $CH = 8 - 2 = 6$ و در مثلث قائم‌الزاویه OCH داریم:

$$OH^2 = OC^2 - CH^2 = 10^2 - 6^2 = 8^2 \Rightarrow OH = 8$$

گزینه ۳۱ عمود OH وتر DE را نصف می‌کند در

نتیجه $CH = CD + DH = 1 + 3 = 4$ و متساوی‌الساقین است، پس $OH = CH = 4$ و نهایتاً در مثلث قائم‌الزاویه OHE داریم:



گزینه ۳۲ عمود BF بر وتر AE در ربع دایره، آن را نصف می‌کند. زاویه AED قائمه است و دو زاویه $\hat{BAF}$ و $\hat{ADE}$ هر دو متمم $\hat{DAE}$ هستند پس برابرند. بنابراین دو مثلث قائم‌الزاویه AFB و DEA به حالت برابری وتر و یک زاویه حاده همنهشت‌اند در نتیجه:

$$AF = DE = 2 \Rightarrow EF = 2 \Rightarrow AE = 4$$

$$AD^2 = DE^2 + AE^2 = 2^2 + 4^2 = 20$$

$$\Rightarrow S_{\text{مربع}} = 20$$

گزینه ۳۳ دو وتر AB و CD موازی‌اند. از مرکز دایره بر آن‌ها عمود رسم می‌کنیم، این وترها نصف می‌شوند.

$$AB = AE + BE = 5 + x$$

$$\Rightarrow AK = BK = \frac{5+x}{2}$$

$$CD = DF + CF = 4 + 2 = 6 \Rightarrow CH = DH = \frac{6}{2} = 3$$

چهارضلعی KEFH مستطیل است، پس:

$$KE = HF \Rightarrow BK - BE = CH - CF$$

$$\Rightarrow \frac{5+x}{2} - x = 3 - 2 = 1 \Rightarrow \frac{5-x}{2} = 1$$

$$\Rightarrow 5 - x = 2 \Rightarrow x = 3$$

گزینه ۳۴ بنا به فرض، زاویه بین دو وتر برابر AB و CD برابر 60° و $MA = MD = 8$ و $MB = MC = 2$ است. عمودهای OE و OF را رسم می‌کنیم. دو وتر نصف می‌شوند و داریم:

$$MF = MD - DF$$

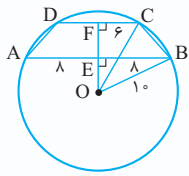
$$= 8 - \frac{8+2}{2} = 8 - 5 = 3$$



دایره

۴۱- گزینه ۱ قطر عمود بر AB بر CD نیز عمود است و هر

دو وتر را نصف می کند. داریم:



$$\triangle OBE : OE^2 + BE^2 = OB^2$$

$$\Rightarrow OE^2 = 10^2 - 8^2 = 36$$

$$\Rightarrow OE = 6$$

$$\triangle OCF : OF^2 + CF^2 = OC^2$$

$$\Rightarrow OF^2 = 10^2 - 6^2 = 64 \Rightarrow OF = 8$$

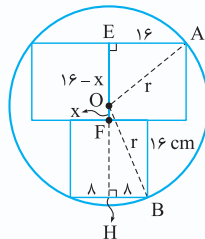
$$EF = OF - OE = 8 - 6 = 2$$

$$S_{(ABCD)} = \frac{1}{2} EF \times (AB + CD) = \frac{1}{2} \times 2 \times (16 + 12) = 28$$

۴۲- گزینه ۱ فرض کنیم $OF = x$ باشد، در این

صورت $OE = 16 - x$ و $OH = 16 + x$ است. در مثلث های

قائم الزاویه OAE و OBH داریم:



$$\begin{cases} r^2 = 16^2 + (16 - x)^2 \\ r^2 = 8^2 + (16 + x)^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 16^2 + (16 - x)^2 = 8^2 + (16 + x)^2$$

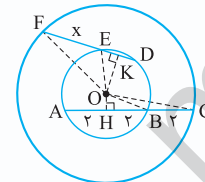
$$\Rightarrow 16^2 + 16^2 - 32x + x^2 = 8^2 + 16^2 + 32x + x^2$$

$$\Rightarrow 64x = 16^2 - 8^2 = 8 \times 24 \Rightarrow 8x = 24 \Rightarrow x = 3$$

$$S_{\text{دایره}} = \pi r^2 = \pi(8^2 + (16 + 3)^2) = \pi(64 + 361) = 425\pi$$

۴۳- گزینه ۳ از مرکز دایره ها بر وترهای AB و DE عمود

می کنیم. دو وتر نصف می شود: $AH = BH = 2$ ، $DK = EK = \frac{1}{2}$.



شعاع دایره های کوچک و بزرگ را به ترتیب r و R می نامیم، داریم:

$$OH^2 = OB^2 - BH^2 = OC^2 - CH^2$$

$$\Rightarrow r^2 - 2^2 = R^2 - 4^2$$

$$OK^2 = OE^2 - EK^2 = OF^2 - KF^2$$

$$\Rightarrow r^2 - (\frac{1}{2})^2 = R^2 - (x + \frac{1}{2})^2$$

از تفاضل دو تساوی فوق داریم:

$$r^2 - (\frac{1}{2})^2 = 4^2 - (x + \frac{1}{2})^2 \Rightarrow 4 - \frac{1}{4} = 16 - (x + \frac{1}{2})^2$$

$$\Rightarrow (x + \frac{1}{2})^2 = 12 + \frac{1}{4} = \frac{49}{4} \Rightarrow x + \frac{1}{2} = \pm \frac{7}{2}$$

$$\xrightarrow{x > 0} x = \frac{7}{2} - \frac{1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$R^2 = 8^2 + 8^2 = 2 \times 8^2 \Rightarrow R = 8\sqrt{2}$$

$$\text{مساحت دایره} = \pi R^2 = 128\pi$$

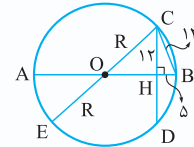
در نتیجه:

۳۸- گزینه ۲ بنا به فرض $CD = 24$ پس

$CH = DH = 12$ و $BC = 13$ است. دورترین نقطه دایره از انتهای

وتر CD با وصل یکی از دو انتها به مرکز دایره به دست می آید (CE

قطر دایره) داریم:



$$BH^2 = BC^2 - CH^2$$

$$= 13^2 - 12^2 = 25 \Rightarrow BH = 5$$

$$OH = OB - BH = R - 5$$

$$OC^2 = OH^2 + CH^2 \Rightarrow R^2 = (R - 5)^2 + 12^2$$

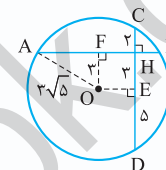
$$\Rightarrow R^2 = R^2 - 10R + 25 + 144 \Rightarrow 10R = 169$$

$$\Rightarrow R = 16.9 \Rightarrow CE = 2R = 2 \times 16.9 = 33.8$$

۳۹- گزینه ۱ بنا به فرض $CH = 2$ و $DH = 8$ است، از

مرکز دایره به دو وتر عمود می کنیم. چهارضلعی OEHF مستطیل

است و داریم:



$$HE = DH - DE$$

$$= 8 - \frac{8 + 2}{2} = 8 - 5 = 3$$

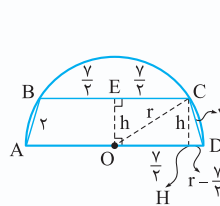
$$\Rightarrow OF = 3$$

$$OA^2 = AF^2 + OF^2 \Rightarrow (3\sqrt{5})^2 = AF^2 + 3^2$$

$$\Rightarrow 45 = AF^2 + 9 \Rightarrow AF^2 = 36 \Rightarrow AF = 6$$

$$\Rightarrow AB = 2AF = 12$$

۴۰- گزینه ۲ در مثلث های قائم الزاویه OCE و DCH داریم:



$$\begin{cases} OC^2 = OE^2 + CE^2 \\ CD^2 = CH^2 + DH^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r^2 = h^2 + (\frac{V}{2})^2 \\ r^2 = h^2 + (r - \frac{V}{2})^2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{-} r^2 - 4 = (\frac{V}{2})^2 - (r - \frac{V}{2})^2$$

$$\Rightarrow r^2 - 4 = (\frac{V}{2} + r - \frac{V}{2})(\frac{V}{2} - r + \frac{V}{2})$$

$$\Rightarrow r^2 - 4 = r(V - r) \Rightarrow r^2 - 4 = 7r - r^2$$

$$\Rightarrow 2r^2 - 7r - 4 = 0 \Rightarrow r = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 32}}{4}$$

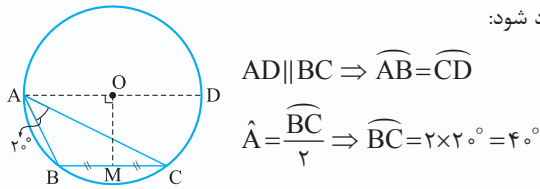
$$\Rightarrow r = \frac{7 \pm \sqrt{81}}{4} = \frac{7 \pm 9}{4}$$

$$\xrightarrow{r > 0} r = \frac{7 + 9}{4} = \frac{16}{4} = 4 \Rightarrow AD = 2r = 8$$



۴۸ - گزینه ۳ چون M وسط BC است، پس OM بر BC

عمود است، لذا $OA \parallel BC$. OA را امتداد می‌دهیم تا قطر AD ایجاد شود:



$$AD \parallel BC \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{CD}$$

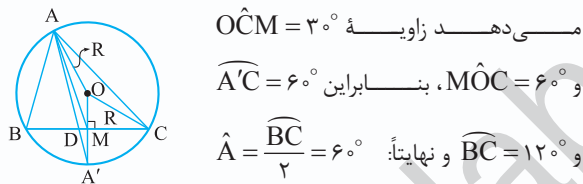
$$\hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2} \Rightarrow \widehat{BC} = 2 \times 2^\circ = 4^\circ$$

$$\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CD} = 180^\circ \Rightarrow 2\widehat{CD} + 4^\circ = 180^\circ \Rightarrow \widehat{CD} = 70^\circ$$

$$\hat{B} = \frac{\widehat{ADC}}{2} = \frac{180^\circ + 70^\circ}{2} = 90^\circ + 35^\circ = 125^\circ$$

۴۹ - گزینه ۳ O مرکز دایره محیطی مثلث ABC، نقطه

همرسي عمودمنصف‌های اضلاع مثلث است، پس اگر M وسط BC باشد، OM بر آن عمود است و کمان نظیر BC را نصف می‌کند ($\widehat{A'B} = \widehat{A'C}$) و نیمساز زاویه A یعنی AD امتدادش از نقطه A' می‌گذرد. اگر در مثلث AOA'، AM میانه OA' باشد در این صورت $OM = MA'$ می‌شود، یعنی شعاع OA' نصف می‌شود. پس در مثلث قائم‌الزاویه OMC، $OM = \frac{OC}{2}$ است که نتیجه



می‌دهد زاویه $\angle OCM = 30^\circ$

و $\angle MOC = 60^\circ$ ، بنابراین $\angle A'C = 60^\circ$

و $\widehat{BC} = 120^\circ$ و نهایتاً: $\hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2} = 60^\circ$



۵۰ - گزینه ۳ محیط مثلث EOF

وقتی کم‌ترین است که ضلع EF در آن

کوچک‌ترین باشد، کم‌ترین طول وتر AB است که بر قطر گذرنده از M عمود است.

بنا به فرض $OM = 2\sqrt{2}$ و شعاع دایره ۳ است، پس می‌توان نوشت:

$$OA^2 = OM^2 + MA^2 \Rightarrow 3^2 = (2\sqrt{2})^2 + MA^2$$

$$\Rightarrow MA^2 = 9 - 8 = 1 \Rightarrow MA = 1$$

$$\triangle EOF \text{ محیط کم‌ترین} = \triangle AOB \text{ محیط} = OA + OB + AB$$

$$= 3 + 3 + 2 \times 1 = 6 + 2 = 8$$

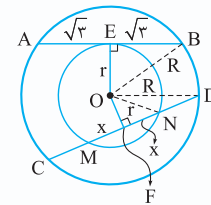
۵۱ - گزینه ۱ یک ضلع زاویه ACB همواره قطری در دایره

بزرگ و ضلع دیگر آن وتر از این دایره است. هر چه قدر این وتر از مرکز دایره دورتر باشد، اندازه زاویه ACB بزرگ‌تر است و ماکسیمم

۴۴ - گزینه ۲ از مرکز دایره‌ها بر دو وتر AB و CD عمود رسم

می‌کنیم، این وترها در دو دایره نصف می‌شوند:

$$MF = NF = x, CF = DF = 3, AE = BE = \sqrt{3}$$



$$OB^2 = OE^2 + BE^2$$

$$\Rightarrow R^2 = r^2 + (\sqrt{3})^2 = r^2 + 3 \quad (1)$$

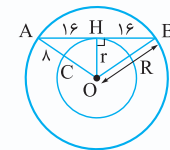
$$OF^2 = OD^2 - DF^2 = ON^2 - NF^2$$

$$\Rightarrow R^2 - 3^2 = r^2 - x^2 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow r^2 + 3 - 3^2 = r^2 - x^2$$

$$\Rightarrow x^2 = 9 - 3 = 6 \Rightarrow x = \sqrt{6} \quad MN = 2x = 2\sqrt{6}$$

۴۵ - گزینه ۲



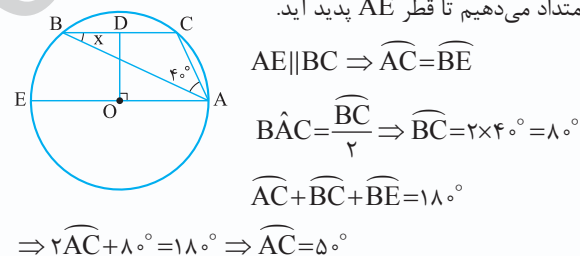
$$\begin{cases} R^2 - r^2 = 16^2 \\ R - r = 8 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{تقسیم}} R + r = \frac{16 \times 16}{8} = 32$$

$$\begin{cases} R + r = 32 \\ R - r = 8 \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} 2r = 24 \Rightarrow r = 12$$

۴۶ - گزینه ۳ چون D وسط وتر BC است، پس OD بر BC

عمود است در نتیجه وتر BC با شعاع OA موازی است. OA را امتداد می‌دهیم تا قطر AE پدید آید.



$$AE \parallel BC \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BE}$$

$$\hat{BAC} = \frac{\widehat{BC}}{2} \Rightarrow \widehat{BC} = 2 \times 40^\circ = 80^\circ$$

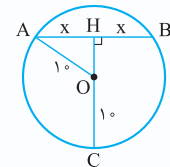
$$\widehat{AC} + \widehat{BC} + \widehat{BE} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 2\widehat{AC} + 80^\circ = 180^\circ \Rightarrow \widehat{AC} = 50^\circ$$

$$\hat{B} = \frac{\widehat{AC}}{2} \Rightarrow x = \frac{50^\circ}{2} = 25^\circ$$

۴۷ - گزینه ۳ C دورترین نقطه دایره از وتر AB است. بنا به

فرض $AB = CH$ می‌باشد، فرض کنیم $AH = x$ باشد. داریم:



$$OH = CH - OC$$

$$= AB - OC = 2x - 10$$

$$OA^2 = AH^2 + OH^2$$

$$\Rightarrow 10^2 = x^2 + (2x - 10)^2$$

$$\Rightarrow 100 = 5x^2 - 40x + 100 \Rightarrow 5x^2 - 40x = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{40}{5} = 8, \quad OH = 2 \times 8 - 10 = 6$$

دایره

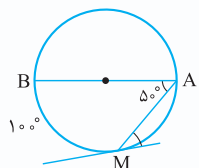
$$\hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2} \Rightarrow \widehat{BC} = 2 \times 72^\circ = 144^\circ$$

$$\widehat{AB} + \widehat{AC} + \widehat{BC} = 360^\circ \Rightarrow \widehat{AB} + \widehat{AC} = 360^\circ - 144^\circ = 216^\circ$$

$$x = \frac{216^\circ}{4} = 54^\circ$$

بنابراین:

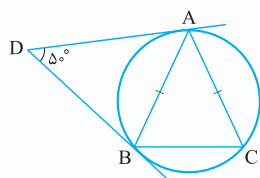
گزینه ۳ - ۵۵



$$\hat{A} = \frac{\widehat{BM}}{2} \Rightarrow \widehat{BM} = 2 \times 50^\circ = 100^\circ$$

$$\hat{M} = \frac{\widehat{AM}}{2} \Rightarrow \hat{M} = \frac{180^\circ - 100^\circ}{2} = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ$$

گزینه ۴ - ۵۶

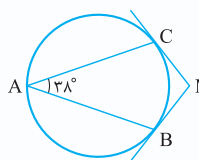


$$\begin{aligned} \widehat{AB} &= 180^\circ - \hat{D} \\ &= 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ \\ AB &= AC \\ \Rightarrow \widehat{AC} &= \widehat{AB} = 130^\circ \end{aligned}$$

$$\widehat{AB} + \widehat{AC} + \widehat{BC} = 360^\circ \Rightarrow \widehat{BC} = 360^\circ - 2 \times 130^\circ = 100^\circ$$

$$\hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2} = \frac{100^\circ}{2} = 50^\circ$$

گزینه ۴ - ۵۷



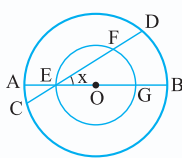
$$\hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2} \Rightarrow \widehat{BC} = 2 \times 76^\circ = 152^\circ$$

$$\hat{M} = 180^\circ - \widehat{BC} = 180^\circ - 152^\circ = 28^\circ$$

گزینه ۴ - ۵۸ بنا به زاویه وترهای متقاطع AB و CD در

دایره بزرگ داریم:

$$x = \frac{\widehat{AC} + \widehat{BD}}{2}$$



اما در دایره کوچک بنا به زاویه محاطی داریم:

$$x = \frac{\widehat{GF}}{2} = \frac{180^\circ - \widehat{EF}}{2}$$

پس از تساوی های فوق نتیجه می شود:

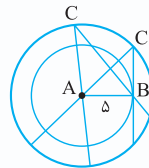
$$\frac{\widehat{AC} + \widehat{BD}}{2} = \frac{180^\circ - \widehat{EF}}{2} \Rightarrow \widehat{BD} = 180^\circ - (\widehat{AC} + \widehat{EF})$$

اما بنا به فرض $\widehat{AC} + \widehat{EF} = 104^\circ$ پس نهایتاً داریم:

$$\widehat{BD} = 180^\circ - 104^\circ = 76^\circ$$

فاصله این وتر تا مرکز دایره وقتی است که BC بر AB عمود باشد،

داریم:

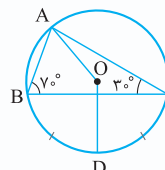


$$\begin{aligned} BC^2 + AB^2 &= AC^2 \\ \Rightarrow BC^2 + 5^2 &= 7^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow BC^2 = 49 - 25 = 24 \Rightarrow BC = 2\sqrt{6}$$

$$S_{(ABC)} = \frac{1}{2} AB \times BC = \frac{1}{2} \times 5 \times 2\sqrt{6} = 5\sqrt{6}$$

گزینه ۳ - ۵۹



$$\begin{aligned} \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} &= 180^\circ \\ \Rightarrow \hat{A} &= 180^\circ - 30^\circ - 70^\circ = 80^\circ \end{aligned}$$

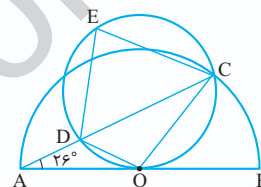
$$\hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2} \Rightarrow \widehat{BC} = 160^\circ \Rightarrow \widehat{BD} = 80^\circ$$

$$\hat{C} = \frac{\widehat{AB}}{2} \Rightarrow \widehat{AB} = 2 \times 30^\circ = 60^\circ$$

$$\text{زاویه مرکزی } \widehat{AOD} = \widehat{AB} + \widehat{BD} = 60^\circ + 80^\circ = 140^\circ$$

گزینه ۴ - ۶۰ O را به C و D وصل می کنیم. زاویه A در

نیم دایره، محاطی است، پس داریم:



$$\begin{aligned} \hat{A} &= \frac{\widehat{BC}}{2} \\ \Rightarrow \widehat{BC} &= 2 \times 26^\circ = 52^\circ \\ \Rightarrow \widehat{BOC} &= 52^\circ \end{aligned}$$

اما زاویه BOC در دایره، زاویه ظلی است، پس می توان نوشت:

$$\widehat{BOC} = \frac{\widehat{OC}}{2} \Rightarrow \widehat{OC} = 52^\circ \times 2 = 104^\circ$$

بنا به زاویه بین امتداد وتر و مماس بر دایره داریم:

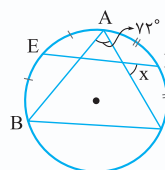
$$\hat{A} = \frac{\widehat{OC} - \widehat{OD}}{2} \Rightarrow 26^\circ \times 2 = 104^\circ - \widehat{OD}$$

$$\Rightarrow \widehat{OD} = 104^\circ - 52^\circ = 52^\circ$$

و نهایتاً اندازه زاویه محاطی E برابر است با:

$$\hat{E} = \frac{\widehat{COD}}{2} = \frac{\widehat{OD} + \widehat{OC}}{2} = \frac{52^\circ + 104^\circ}{2} = 26^\circ + 52^\circ = 78^\circ$$

گزینه ۴ - ۶۱



$$\begin{aligned} x &= \frac{\widehat{CD} + \widehat{AE}}{2} \\ &= \frac{\frac{\widehat{AC}}{2} + \frac{\widehat{AB}}{2}}{2} = \frac{\widehat{AC} + \widehat{AB}}{4} \end{aligned}$$



$\widehat{AD} = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$
 $\widehat{ABC} = \alpha = \frac{180^\circ + \widehat{AD}}{2}$
 $= \frac{180^\circ + 50^\circ}{2} = 115^\circ$

$\widehat{AC} = 90^\circ - \widehat{D} = 90^\circ - 2\alpha$
 $\widehat{B} = \frac{\widehat{AC}}{2} = 45^\circ - \alpha$

$\triangle BDE: x + \alpha + 45^\circ - \alpha = 180^\circ \Rightarrow x = 135^\circ$

$\widehat{BED} = 2\alpha$
 $\Rightarrow 2\widehat{CD} = 2\alpha \Rightarrow \widehat{CD} = \alpha$
 $\widehat{BC} = 360^\circ - 2\alpha - \alpha = 360^\circ - 3\alpha$
 $\widehat{A} = \frac{\widehat{BED} - \widehat{BC}}{2}$
 $\Rightarrow 50^\circ = \frac{2\alpha - (360^\circ - 3\alpha)}{2}$
 $\Rightarrow 5\alpha = 460^\circ \Rightarrow \alpha = 92^\circ$

قطر شامل DS بر وتر AC عمود است، پس
 AC و کمان نظیر آن را نصف می کند. ($\widehat{AD} = \widehat{CD}$)

$\widehat{AD} + \widehat{CD} + \widehat{BC} = 180^\circ$
 $\Rightarrow 2\widehat{AD} + 40^\circ = 180^\circ$
 $\Rightarrow \widehat{AD} = 70^\circ$
 $\widehat{BEC} = \frac{\widehat{BC} + \widehat{AD}}{2} = \frac{40^\circ + 70^\circ}{2} = 55^\circ$

$\widehat{BCD} = \frac{\widehat{AB} + \widehat{AE} + \widehat{DE}}{2}$
 $\Rightarrow 100^\circ = \frac{\widehat{AB} + 4x + x}{2}$
 $\Rightarrow \widehat{AB} = 200^\circ - 5x$

$\widehat{M} = \frac{\widehat{AB} - \widehat{DE}}{2} \Rightarrow x = \frac{200^\circ - 5x - x}{2} \Rightarrow 8x = 200^\circ$
 $\Rightarrow x = 25^\circ$

مماس مشترک دو دایره را در نقطه C رسم می کنیم. در نقطه C دو زاویه ظلی پدید می آید که هر کدام با زاویه

چون دو دایره مساوی اند. کمان

کوچک $\widehat{AD}$ در هر دو دایره هم اندازه است، پس $\widehat{B} = \widehat{C} = \frac{\widehat{AD}}{2}$ یعنی مثلث ABC متساوی الساقین است. با رسم ارتفاع AH داریم:

$BC = 18 \Rightarrow BH = CH = 9 \Rightarrow DH = CH - CD = 9 - 4 = 5$
 $AH^2 = AD^2 - DH^2 = 13^2 - 5^2 = 12^2 \Rightarrow AH = 12$
 $S(ABC) = \frac{1}{2} AH \times BC = \frac{1}{2} \times 12 \times 18 = 108$

زاویه A محاطی است، پس
 $\widehat{BC} = 2\widehat{A} = 80^\circ$ و در نتیجه $\widehat{BOC} = 80^\circ$ و $\widehat{EOF} = 80^\circ$ داریم:

$\widehat{BEC} + \widehat{BFC} = \widehat{A} + \widehat{EOF}$
 $\Rightarrow \widehat{BEC} + \widehat{BFC} = 40^\circ + 80^\circ = 120^\circ$

برای اثبات تساوی فوق کافی است O را به A وصل کنیم و از زاویه خارجی در مثل استفاده کنیم.

در هر چهارضلعی محدب، مجموع دو زاویه مقابل برابر مجموع دو زاویه خارجی دیگر است.
 $\Rightarrow a + b = x + y$

فرض کنیم $AF = x$ ، بنا به وترهای موازی نتیجه می شود $DE = BC = AF = x$.

مفروضات مسئله روی شکل آورده شده است، داریم:
 $x + 60^\circ + x + 40^\circ + x + 110^\circ = 360^\circ$
 $\Rightarrow 3x = 150^\circ \Rightarrow x = 50^\circ$
 $\widehat{FCD} = \frac{\widehat{DF}}{2} = \frac{\widehat{DE} + \widehat{EF}}{2} = \frac{x + 110^\circ}{2}$
 $= \frac{50^\circ + 110^\circ}{2} = \frac{160^\circ}{2} = 80^\circ$

نکته کلیدی MC بر دایره مماس و AB قطر دایره است. با

فرض $\widehat{M} = \alpha$ داریم:
 $\widehat{BC} = 90^\circ - \alpha$ ، $\widehat{AC} = 90^\circ + \alpha$

دایره

$$\left. \begin{aligned} \widehat{BE} &= 118^\circ - \hat{A} = 118^\circ - 100^\circ = 18^\circ \\ \widehat{CD} &= 118^\circ - \hat{F} = 118^\circ - 4^\circ = 114^\circ \end{aligned} \right\}$$

$$\rightarrow \widehat{BE} + \widehat{CD} = 132^\circ$$

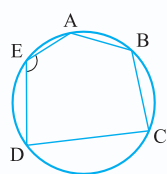
$$\widehat{DE} + \widehat{BC} = 136^\circ - (\widehat{BE} + \widehat{CD}) = 136^\circ - 132^\circ = 4^\circ$$

$$x = \frac{\widehat{DE} + \widehat{BC}}{2} = \frac{4^\circ}{2} = 2^\circ$$

-۷۱ گزینه ۲

نکته کلیدی در دایره به شعاع R اگر اندازه وتر AB برابر $R\sqrt{3}$ یا $R\sqrt{2}$ باشد، آن گاه اندازه کمان $\widehat{AB}$ به ترتیب برابر 60° یا 90° یا 120° است و برعکس.

با توجه به نکته فوق و فرض $BC = R\sqrt{2}$ ، $AB = R$ و $\widehat{BC} = 90^\circ$ ، $\widehat{AB} = 60^\circ$ نتیجه می‌شود: $\widehat{CD} = R\sqrt{3}$ و

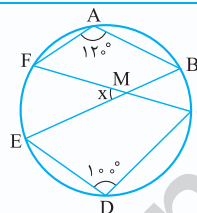


$$\widehat{CD} = 120^\circ \text{ و نهایتاً داریم:}$$

$$\hat{E} = \frac{\widehat{ABD}}{2} = \frac{\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CD}}{2}$$

$$= \frac{60^\circ + 90^\circ + 120^\circ}{2} = \frac{270^\circ}{2} = 135^\circ$$

-۷۲ گزینه ۳



$$\hat{A} = \frac{\widehat{BDF}}{2} = \frac{\widehat{CDE} + \widehat{BC} + \widehat{EF}}{2}$$

$$\Rightarrow \widehat{CDE} + \widehat{BC} + \widehat{EF} = 2 \times 120^\circ = 240^\circ$$

$$\hat{D} = \frac{\widehat{EAC}}{2} = \frac{\widehat{BAF} + \widehat{BC} + \widehat{EF}}{2}$$

$$\Rightarrow \widehat{BAF} + \widehat{BC} + \widehat{EF} = 2 \times 100^\circ = 200^\circ$$

از جمع دو تساوی فوق داریم:

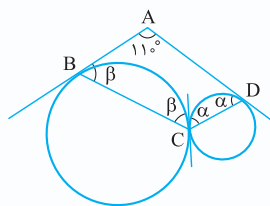
$$\widehat{CDE} + \widehat{BAF} + 2(\widehat{BC} + \widehat{EF}) = 440^\circ$$

$$\Rightarrow 136^\circ - (\widehat{BC} + \widehat{EF}) + 2(\widehat{BC} + \widehat{EF}) = 440^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{BC} + \widehat{EF} = 440^\circ - 136^\circ = 304^\circ$$

$$\Rightarrow x = \frac{\widehat{BC} + \widehat{EF}}{2} = \frac{304^\circ}{2} = 152^\circ$$

ظلی $\hat{B}$ و $\hat{D}$ برابرند، زیرا کمان‌های روبه‌رو به آن‌ها یکسان است. در چهارضلعی $ABCD$ داریم:



$$\alpha + \beta + \alpha + \beta + 110^\circ = 360^\circ$$

$$\Rightarrow 2(\alpha + \beta) = 250^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{BCD} = 125^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta = 125^\circ$$

-۶۸ گزینه ۳

کمان‌های نظیر وترهای مساوی برابرند، پس $\widehat{AE} = \widehat{BC} = \alpha$ و $\widehat{DE} = \widehat{CD} = \beta$. بنا به زاویه محاطی داریم:

$$\hat{A} = \frac{\alpha + 2\beta}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\alpha + 2\beta}{2}$$

$$\hat{M} = \frac{\widehat{AED} - \widehat{BC}}{2} \Rightarrow 30^\circ = \frac{\alpha + \beta - \alpha}{2} \Rightarrow \beta = 60^\circ$$

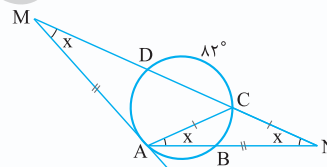
$$\alpha + \beta + \beta + \alpha = 118^\circ \Rightarrow 2\alpha + 120^\circ = 118^\circ$$

$$\Rightarrow 2\alpha = -2^\circ \Rightarrow \alpha = -1^\circ$$

$$x = \frac{2\beta + \alpha}{2} = \frac{120^\circ - 2^\circ}{2} = 59^\circ$$

-۶۹ گزینه ۳

فرض کنیم $\hat{M} = x$ با توجه به $AM = AN$ داریم:



$$\hat{N} = x$$

در مثلث متساوی‌الساقین ACN نتیجه می‌شود $\widehat{NAC} = x$ داریم:

$$\widehat{NAC} = x \Rightarrow \widehat{BAC} = x \Rightarrow \frac{\widehat{BC}}{2} = x \Rightarrow \widehat{BC} = 2x$$

$$\hat{N} = \frac{\widehat{AD} - \widehat{BC}}{2} \Rightarrow x = \frac{\widehat{AD} - 2x}{2} \Rightarrow \widehat{AD} = 4x$$

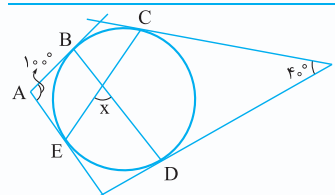
$$\hat{M} = \frac{\widehat{ABC} - \widehat{AD}}{2} \Rightarrow x = \frac{\widehat{AB} + \widehat{BC} - \widehat{AD}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\widehat{AB} + 2x - 4x}{2} \Rightarrow \widehat{AB} = 4x$$

$$\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CD} + \widehat{AD} = 360^\circ \Rightarrow 4x + 2x + 120^\circ + 4x = 360^\circ$$

$$\Rightarrow 10x = 360^\circ - 120^\circ = 240^\circ \Rightarrow x = 24^\circ$$

-۷۰ گزینه ۱





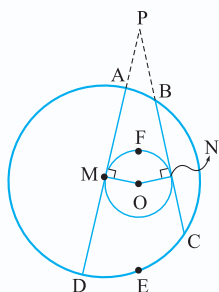
و نهایتاً به کمک زاویه خارجی در مثلث BOC داریم:

$$\widehat{ACB} = \widehat{AOB} + \widehat{OBC} \Rightarrow 111^\circ = 84^\circ + x \Rightarrow x = 27^\circ$$

نقطه تلاقی امتداد وترهای BC و AD را P

گزینه ۴

می‌نامیم و داریم:



$$\widehat{MFN} = 154^\circ \Rightarrow \widehat{MON} = 154^\circ$$

$$\hat{p} = 180^\circ - \widehat{MON}$$

$$= 180^\circ - 154^\circ = 26^\circ$$

$$\hat{p} = \frac{\widehat{CED} - \widehat{AB}}{2}$$

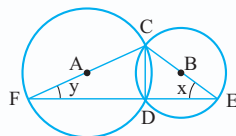
$$\Rightarrow 26^\circ = \frac{70^\circ - \widehat{AB}}{2}$$

$$\Rightarrow \widehat{AB} = 70^\circ - 52^\circ = 18^\circ$$

CE قطر دایره کوچک، پس $\widehat{CDE} = 90^\circ$ با

گزینه ۴

استدلال مشابه داریم: $\widehat{CDF} = 90^\circ$ پس DE و DF روی یک



امتدادند، بنا به فرض $\widehat{ACB} = 15^\circ$

در نتیجه در مثلث CEF اندازه یک

زاویه آن $\widehat{FCE} = 15^\circ$ است.

با فرض $\hat{E} = x$ و $\hat{F} = y$ اندازه مجموع کمان‌های CD در دو

دایره $2x + 2y$ است و داریم: $x + y = 180^\circ - 15^\circ = 3^\circ$

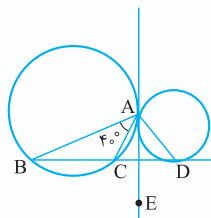
اندازه مجموع کمان‌های CD $2(x + y) = 2 \times 3^\circ = 6^\circ$

در نقطه A

گزینه ۴

مماس مشترک دو دایره را رسم

می‌کنیم:



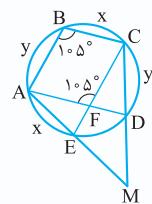
$$(\widehat{CAE} = \frac{\widehat{AC}}{2}, \widehat{B} = \frac{\widehat{AC}}{2}) \Rightarrow \widehat{CAE} = \widehat{B} \quad (1)$$

$$(\widehat{DAE} = \frac{\widehat{AD}}{2}, \widehat{D} = \frac{\widehat{AD}}{2}) \Rightarrow \widehat{DAE} = \widehat{D} \quad (2)$$

$$\widehat{ABD} : \widehat{B} + \widehat{D} + \widehat{BAD} = 180^\circ \xrightarrow{(1), (2)}$$

$$\underbrace{\widehat{CAE} + \widehat{DAE}}_{\widehat{CAD}} + 40^\circ + \widehat{CAD} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 2\widehat{CAD} = 140^\circ \Rightarrow \widehat{CAD} = 70^\circ$$



گزینه ۳

$$AB \parallel CE \Rightarrow \widehat{BC} = \widehat{AE} = x$$

$$BC \parallel AD \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{CD} = y$$

$ABCF \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{AFC} = 105^\circ$ متوازی الاضلاع است.

$$\Rightarrow \frac{\widehat{AEC}}{2} = 105^\circ \Rightarrow \widehat{AEC} = 21^\circ$$

$$\widehat{ABC} = 36^\circ - \widehat{AEC} = 36^\circ - 21^\circ = 15^\circ \Rightarrow x + y = 15^\circ$$

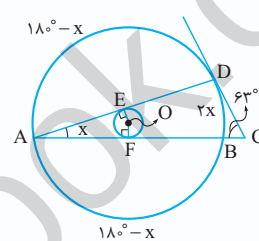
$$\hat{M} = \frac{\widehat{ABC} - \widehat{DE}}{2} = \frac{x + y - (36^\circ - x - y - x - y)}{2}$$

$$= \frac{2(x + y) - 36^\circ}{2} = \frac{45^\circ - 36^\circ}{2} = \frac{9^\circ}{2} = 4.5^\circ$$

چون $OE = OF$ (شعاع‌های دایره کوچک)،

گزینه ۴

پس مرکز دایره بزرگ از دو وتر AB و AD به یک فاصله است، لذا



طول این دو وتر و در نتیجه

کمان‌های نظیر آن‌ها برابرند

$$(\widehat{AB} = \widehat{AD}, \widehat{AB} = \widehat{AD})$$

با فرض $\hat{A} = x$ و خاصیت زاویه

محاطی، $\widehat{BD} = 2x$ می‌شود، در

$$\text{نتیجه } \widehat{AD} = \widehat{AB} = \frac{36^\circ - 2x}{2} = 18^\circ - x \text{ و داریم:}$$

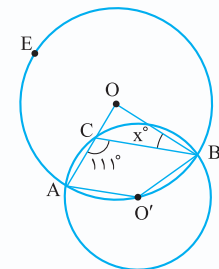
$$\hat{C} = \frac{\widehat{AD} - \widehat{BD}}{2} \Rightarrow 63^\circ = \frac{18^\circ - x - 2x}{2}$$

$$\Rightarrow 180^\circ - 3x = 126^\circ \Rightarrow 3x = 54^\circ \Rightarrow x = 18^\circ$$

نقطه O' را به A و B وصل می‌کنیم.

گزینه ۳

زاویه $\widehat{ACB} = 111^\circ$ در دایره کوچک محاطی است، پس:



$$\widehat{ACB} = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

$$\Rightarrow \widehat{AB} = 2 \times 111^\circ = 222^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{ACB} = 36^\circ - 222^\circ = 138^\circ$$

$$\xrightarrow{\text{زاویه مرکزی}} \widehat{AO'B} = 138^\circ$$

از طرفی $\widehat{AO'B}$ در دایره بزرگ محاطی است، پس:

$$\widehat{AO'B} = \frac{\widehat{AEB}}{2} \Rightarrow \widehat{AEB} = 2 \times 138^\circ = 276^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{AO'B} = 36^\circ - 276^\circ = 84^\circ \xrightarrow{\text{زاویه مرکزی}} \widehat{AOB} = 84^\circ$$



دایره

$$\left. \begin{aligned} \widehat{B_1} = \frac{\widehat{AB}}{2}, \widehat{D_1} = \frac{\widehat{AB}}{2} \Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{D_1} \\ \widehat{C_1} = \frac{\widehat{AC}}{2}, \widehat{D_1} = \frac{\widehat{AC}}{2} \Rightarrow \widehat{C_1} = \widehat{D_1} \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \widehat{B_1} + \widehat{C_1} = \widehat{D_1} + \widehat{D_1} = \widehat{BDC} \quad (1)$$

اما در مثلث‌های BMC و BDC داریم:

$$\widehat{BMC} + \widehat{B_1} + \widehat{C_1} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{B_1} + \widehat{C_1} = 180^\circ - \widehat{BMC} \quad (2)$$

$$\widehat{BDC} + \widehat{B_1} + \widehat{C_1} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BDC} = 180^\circ - \widehat{B_1} - \widehat{C_1} \quad (3)$$

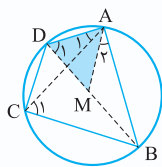
$$(1), (2), (3) \Rightarrow 180^\circ - \widehat{BMC} = 180^\circ - \widehat{B_1} - \widehat{C_1}$$

$$\Rightarrow \widehat{BMC} = \widehat{B_1} + \widehat{C_1} = \frac{\widehat{AED}}{2} + \frac{\widehat{AFD}}{2}$$

کمان‌های AED و AFD دارای مقدار ثابتی هستند، زیرا دو دایره معلوم‌اند. بنابراین اندازه زاویه BMC با تغییر قاطع در نقطه A همواره ثابت می‌ماند.

۸۲- گزینه ۱

$$\left. \begin{aligned} \widehat{D_1} = \frac{\widehat{AB}}{2}, \widehat{C_1} = \frac{\widehat{AB}}{2} \Rightarrow \widehat{D_1} = \widehat{C_1} \\ \widehat{A_1} = \widehat{A_1} \Rightarrow \widehat{A_1} + \widehat{C_1} = \widehat{A_1} + \widehat{D_1} \\ \Rightarrow \widehat{DAM} = \widehat{CAB} \end{aligned} \right\}$$

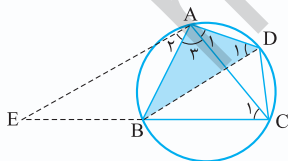


$$\Rightarrow \triangle ADM \sim \triangle ACB$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{DM}{BC} \Rightarrow AD \cdot BC = AC \cdot DM$$

۸۳- گزینه ۱

$$\left. \begin{aligned} \widehat{D_1} = \frac{\widehat{AB}}{2}, \widehat{C_1} = \frac{\widehat{AB}}{2} \Rightarrow \widehat{D_1} = \widehat{C_1} \\ \widehat{A_1} = \widehat{A_1} \Rightarrow \widehat{A_1} + \widehat{C_1} = \widehat{A_1} + \widehat{D_1} \Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{EAC} \end{aligned} \right\}$$



$$\triangle ABD \sim \triangle AEC$$

$$\Rightarrow \frac{BD}{CE} = \frac{AD}{AC}$$

$$\Rightarrow BD \cdot AC = AD \cdot CE$$

۸۴- گزینه ۲ وتر BC را رسم می‌کنیم دو زاویه $\widehat{B_1}$ و $\widehat{B_2}$ محاطی و روبه‌رو به کمان‌های مساوی CE و AE هستند، پس $\widehat{B_1} = \widehat{B_2}$ و داریم:

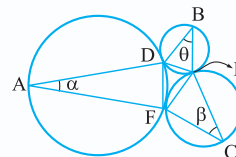
$$(\widehat{E} = \frac{\widehat{BC}}{2}, \widehat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2}) \Rightarrow \widehat{E} = \widehat{A}$$

$$(\widehat{E} = \widehat{A}, \widehat{B_1} = \widehat{B_2}) \Rightarrow \triangle BCE \sim \triangle BDA \Rightarrow \frac{CE}{AD} = \frac{BE}{AB}$$

۷۹- گزینه ۲ فرض کنید در نقطه D مماس مشترک دو دایره

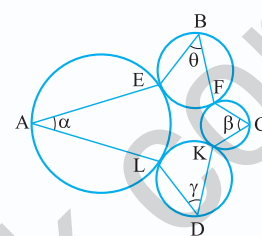
را رسم کنیم، در این صورت در این نقطه دو زاویه ظلی پدید می‌آید که یکی در دایره بزرگ‌تر با زاویه محاطی به اندازه α برابر است و دیگری با زاویه محاطی θ در دایره کوچک‌تر برابر است، یعنی $\widehat{FDE} = \alpha + \theta$. با استدلال مشابه داریم: $\widehat{DFE} = \alpha + \beta$

$$\triangle DEF: \widehat{FDE} + \widehat{DFE} + \widehat{DEF} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{DEF} = \theta + \beta$$



$$\Rightarrow \alpha + \theta + \alpha + \beta + \theta + \beta = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta + \theta = 90^\circ$$



نکته اگر چهار دایره مطابق شکل روبه‌رو دایره‌ها بر هم مماس باشند، آن‌گاه داریم:

$$\alpha + \beta + \theta + \gamma = 180^\circ$$

۸۰- گزینه ۳

وتر مشترک AB و شعاع‌های O_1P و O_2Q را

رسم می‌کنیم، فرض کنیم $\widehat{ABP} = y$ و $\widehat{ABQ} = x$ در این صورت بنا به زاویه محاطی و مرکزی داریم:

$$\widehat{AO_1Q} = \widehat{AQ} = 2\widehat{ABQ} = 2x$$

$$\widehat{AO_2P} = \widehat{AP} = 2\widehat{ABP} = 2y$$

در مثلث‌های متساوی‌الساقین AO_1P و AO_2Q می‌توان نوشت:

$$\widehat{O_1AQ} = \frac{180^\circ - \widehat{AO_1Q}}{2} = \frac{180^\circ - 2x}{2} = 90^\circ - x$$

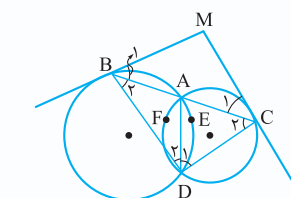
$$\widehat{O_2AP} = \frac{180^\circ - \widehat{AO_2P}}{2} = \frac{180^\circ - 2y}{2} = 90^\circ - y$$

$$\rightarrow \widehat{O_1AQ} + \widehat{O_2AP} = 180^\circ - x - y$$

$$\widehat{O_1AQ} + \widehat{O_2AP} + \widehat{PAQ} + \widehat{O_1AO_2} = 360^\circ$$

$$\widehat{O_1AO_2} = \widehat{PAQ} = 110^\circ \rightarrow 180^\circ - x - y + 110^\circ + 110^\circ = 360^\circ$$

$$\Rightarrow x + y = 220^\circ - 180^\circ = 40^\circ \Rightarrow \widehat{PBQ} = 40^\circ$$



۸۱- گزینه ۴ وتر مشترک

AD و پاره‌خط‌های BD و CD

را رسم می‌کنیم، داریم:



۸۸ - گزینه ۲ اولاً ثابت می‌کنیم در این شکل همواره AD

نیمساز زاویه $\widehat{BAC}$ است. مماس مشترک دو دایره را در نقطه A رسم می‌کنیم. در مثلث ADC بنا به زاویه خارجی داریم:

$$\widehat{ADB} = \widehat{C} + \widehat{A}_r$$

دو زاویه $\widehat{ADB}$ و $\widehat{DAF}$ در دایره کوچک، ظلی هستند و کمان روبه‌روی آن‌ها $\widehat{AED}$ است، پس این دو زاویه برابرند و می‌توان نوشت:

$$\widehat{ADB} = \widehat{DAF} = \widehat{A}_r + \widehat{BAF} \quad (1)$$

اما در دایره بزرگ زاویه $\widehat{C}$ محاطی و زاویه $\widehat{BAF}$ ظلی هستند و هر دو روبه‌رو به کمان $\widehat{AB}$ می‌باشند، پس برابرند در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\widehat{ADB} = \widehat{C} + \widehat{A}_r \quad (2)$$

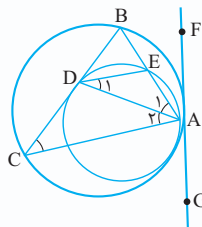
$$(1), (2) \Rightarrow \widehat{C} + \widehat{A}_r = \widehat{A}_r + \widehat{BAF} \xrightarrow{\widehat{C} = \widehat{BAF}}$$

AD نیمساز زاویه $\widehat{BAC}$ است $\widehat{A}_r = \widehat{A}_l$

ثانیاً با فرض $AE = m$ و $AC = b$ می‌خواهیم طول AD را حساب کنیم به همین جهت D را به E وصل می‌کنیم.

در دایره کوچک، $\widehat{D}_l$ زاویه محاطی و $\widehat{EAF}$ زاویه ظلی و روبه‌رو به کمان $\widehat{AE}$ هستند، پس برابرند. $(\widehat{D}_l = \widehat{EAF})$

اما $\widehat{EAF}$ همان زاویه $\widehat{BAF}$ است که با زاویه $\widehat{C}$ برابر است،



لذا $\widehat{D}_l = \widehat{C}$. پس می‌توان نوشت:

$$(\widehat{D}_l = \widehat{C} \text{ و } \widehat{A}_l = \widehat{A}_r)$$

$$\Rightarrow \triangle AED \sim \triangle ADC$$

$$\Rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{AD}{AC}$$

$$\Rightarrow AD^2 = AE \cdot AC = m \times b \Rightarrow AD = \sqrt{bm}$$

۸۹ - گزینه ۱ با توجه به شکل داریم:

$$BH + r + 1 = 6 \Rightarrow BH = 5 - r$$

$$AH + r + 1 = 5 \Rightarrow AH = 4 - r$$

$$\triangle ABH: AB^2 = AH^2 + BH^2 \Rightarrow (r+1)^2 = (4-r)^2 + (5-r)^2$$

$$\Rightarrow r^2 + 2r + 1 = r^2 - 8r + 16 + r^2 - 10r + 25$$

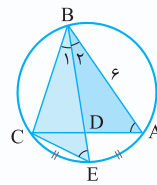
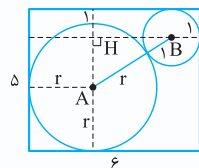
$$\Rightarrow r^2 - 20r + 40 = 0 \Rightarrow r = 10 \pm \sqrt{60} = 10 \pm 2\sqrt{15}$$

جواب $r = 10 + 2\sqrt{15}$ قابل قبول نیست،

زیرا از ۴ بیشتر است که منفی بودن AH را

موجب می‌شود پس جواب

قابل قبول $r = 10 - 2\sqrt{15}$ است.



اما بنا به فرض $AD = 2/4$, $AB = 6$

و $BE = 8$ است، در نتیجه داریم:

$$CE = \frac{AD \times BE}{AB} = \frac{2/4 \times 8}{6} = 3/2$$

۸۵ - گزینه ۲

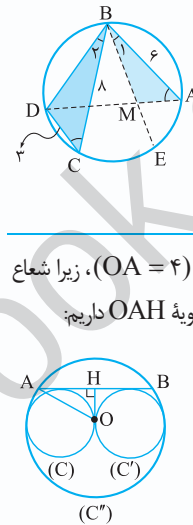
$$\left. \begin{aligned} (\widehat{B}_l = \frac{\widehat{AE}}{2}, \widehat{B}_r = \frac{\widehat{CD}}{2}) &\xrightarrow{\widehat{AE} = \widehat{CD}} \widehat{B}_l = \widehat{B}_r \\ (\widehat{A} = \frac{\widehat{BD}}{2}, \widehat{C} = \frac{\widehat{BD}}{2}) &\Rightarrow \widehat{A} = \widehat{C} \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \triangle ABM \sim \triangle CBD \Rightarrow \frac{AM}{CD} = \frac{AB}{BC}$$

اما بنا به فرض $BC = 8$, $AB = 6$

و $CD = 3$ ، در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned} AM &= \frac{CD \times AB}{BC} = \frac{3 \times 6}{8} \\ &= \frac{18}{8} = \frac{9}{4} = 2.25 \end{aligned}$$



۸۶ - گزینه ۱ شعاع دایره C'' برابر ۴ است ($OA = 4$)، زیرا شعاع

دایره‌های کوچک برابر ۲ می‌باشد، پس در مثلث قائم‌الزاویه OAH داریم:

$$OA^2 = OH^2 + AH^2$$

$$\Rightarrow AH^2 = 4^2 - 2^2 = 16 - 4 = 12$$

$$\Rightarrow AH = 2\sqrt{3}$$

$$AB = 2AH = 4\sqrt{3}$$

۸۷ - گزینه ۲ A را به C وصل می‌کنیم. AC و AB

شعاع‌های دایره به مرکز A هستند، پس مثلث ABC

متساوی‌الساقین است و در نتیجه $\widehat{B}_l = \widehat{C}$ و داریم:

$$\widehat{C} = \frac{\widehat{AB}}{2}, \widehat{E} = \frac{\widehat{AB}}{2} \Rightarrow \widehat{C} = \widehat{E} \xrightarrow{\widehat{B}_l = \widehat{C}} \widehat{B}_l = \widehat{E}$$

$$(\widehat{BAD} = \widehat{BAE}, \widehat{B}_l = \widehat{E}) \Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle AEB$$

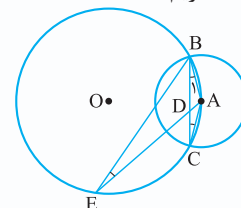
$$\Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow AB^2 = AE \cdot AD$$

بنا به فرض $AD = 4$, $DE = 12$ ، در نتیجه داریم:

$$AB^2 = (AD + DE) \times AD$$

$$= (4 + 12) \times 4 = 16 \times 4$$

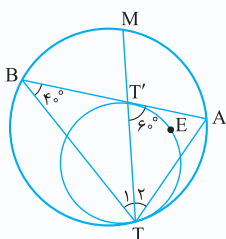
$$\Rightarrow AB = 4 \times 2 = 8$$



دایره

 از طرفی در دایره بزرگ $\hat{B}$ زاویه محاطی است، پس:

$$\hat{B} = \frac{\widehat{AT}}{2} = \frac{8^\circ}{2} = 4^\circ$$


 در نتیجه بنا به زاویه خارجی $T_1 = 2^\circ$ و

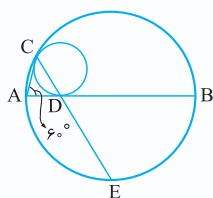
$$\hat{T}_1 = 2^\circ \text{ می شود و نهایتاً داریم:}$$

$$\hat{T}_1 = 2^\circ \Rightarrow \frac{\widehat{AM}}{2} = 2^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{AM} = 4^\circ$$

امتداد CD از وسط کمان AB می گذرد (به پرسش

۹۲- گزینه ۳

 ۹۰ رجوع شود)؛ در نتیجه اندازه زاویه محاطی $\hat{C}$ برابر است با:


$$\hat{C} = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{9^\circ}{2} = 4.5^\circ$$

$$\hat{BDC} = \hat{A} + \hat{C}$$

$$= 6^\circ + 4.5^\circ = 10.5^\circ$$

۹۰- گزینه ۲ در پرسش (۹۰) ثابت کردیم TM نیمساز زاویه

ATB است، پس امتداد TM قطعاً از وسط کمان AB یعنی نقطه

C می گذرد. همچنین TN نیمساز زاویه CTD است، پس امتداد

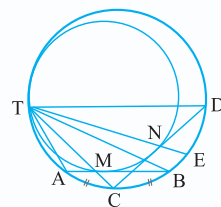
TN از وسط کمان CD یعنی نقطه E می گذرد و داریم:

$$\widehat{MTN} = \widehat{CTE} = \frac{\widehat{CE}}{2} = \frac{\widehat{CD}}{4} = \frac{\widehat{BC} + \widehat{BD}}{4}$$

 اما بنا به فرض $\widehat{BC} = 3^\circ$ و $\widehat{BD} = 6^\circ$ است، در نتیجه:

$$\widehat{MTN} = \frac{3^\circ + 6^\circ}{4}$$

$$= \frac{9^\circ}{4} = 2.25^\circ$$



۹۱- گزینه ۴ در پرسش (۹۰) ثابت کردیم TT' نیمساز

زاویه ATB است، پس امتداد TT' از وسط کمان AB می گذرد، یعنی

نقطه M وسط کمان AB است. اما در دایره کوچک زاویه AT'T ظلی

$$\widehat{AT'T} = \frac{\widehat{TET'}}{2} = \frac{12^\circ}{2} = 6^\circ$$

است، پس: