

معمولاً وقتی که صبح از خواب بیدار می‌شیم، برنامه‌هایی که برای طول روزمون داریم، تو ذهنمون مرور می‌شن که امروز باید فلان کار رو انجام بدیم، یا به فلان جا بریم برای دیدن یک شخص، حالا می‌تونه کاری یا غیرکاری باشه 😊). یا باید امروز ۸ ساعت مفید درس بخونیم و مثلاً بیشتر روی درس ریاضی یا فیزیک زمان بذاریم. معمولاً اوایل ماجرا، انرژی کافی داریم و همه چی خوب پیش می‌ره، اما اگه آخر شب به یه سری از برنامه‌های طول روزمون نرسیم حس ناتمومی کار بهمون دست می‌ده! یه حسی شبیه عذاب وجدان که کارمون به نحو احسن انجام نشده!

کلن انتهای یه کار خیلی مهم و تأثیرگذار و خوب انجام دادن آخر یه کار خیلی ارزشمند (قدیمی‌ها یه ضرب‌المثل دارن که می‌گه، کار را که کرد آن‌که تمام کرد 😊).

تو پروژه «آماده‌شدن برای کنکور» هم آخرای ماجرا مهم‌تره و کسی برنده است که کار رو خوب تمومه کنه! با یه جمع‌بندی خوب، می‌تونیم خودمون رو واسه یه رقابت سرسخت و تنگاتنگ آماده‌تر کنیم. از اون‌جا که ما خیلی سبز هستیم، پس سعی می‌کنیم هر کاری رو خیلی خوب انجام بدیم! توی کتابای جمع‌بندی خیلی سبز، خواستیم با تغییرات جالب و گسترده‌ای که دادیم خیلی خیلی متفاوت باشیم و همه مطالب و مباحث رو به بهترین شکل ممکن طبقه‌بندی کنیم.

خلاصه این‌که: جمع‌بندی کردن رو جدی بگیرید و خیلی خوب و با صبر و حوصله فراوان این کار رو به ته برسونید تا ته ماجرا اون حس بده نیاد سراغتون! ما هم که این‌جا خیلی خیلی هواتونو داریم. دوستون داریم.

«خط به خط این کتاب، با احترام
تقدیم به همه دانش‌آموزان و معلم‌های عزیز»

به کتاب جمع‌بندی ریاضیات تجربی خوش آمدید.

من همیشه به دنبال یک جواب منطقی برای این سؤال دانش‌آموزان بودم:

«استاد! کدام قسمت‌ها مهم‌تر هستند که اون‌ها رو بیشتر بخونیم، برای چه نکاتی کم‌تر وقت بذاریم؟»

سعی کردم با تألیف این کتاب، جواب آبرومندی برای دانش‌آموزان عزیزم، آماده کرده باشم.

توی این کتاب، سعی کردیم «دست‌اندازها» رو از سر راه یادگیری دانش‌آموزان برداریم و «ترمز» پیشرفت در فراگیری مطالب نباشیم.

با استفاده از تجربه سال‌ها تدریس و بارها تألیف، گفتنی‌ها رو گفتیم و از گفتن هر آن‌چه که ممکن بود دانش‌آموز عزیزمون رو از مسیر اصلی دور کنه پرهیز کردیم، در واقع:

«این تمام چیزی بود که می‌خواستیم بگیم، نه تمام چیزی که می‌تونستیم بگیم»

شاید سخت‌ترین قسمت تألیف این کتاب، «مقاومت» در برابر نوشتن مطالبی بود که در طول سال خوندنشون خالی از لطف نیست ولی قطعاً در کتاب جمع‌بندی مسیر پیشرفت رو ناهموار می‌کنه.

این کتاب شامل ۱۵ فصل هست که تمام مباحث هر سه پایه، دهم، یازدهم و دوازدهم رو در بر می‌گیره. مهم‌ترین ویژگی‌های این کتاب به نظرم این‌ها هستند:

۱ تیپ‌بندی تست‌های هر مبحث

۲ درس‌نامه‌های آموزشی کاربردی برای هر تیپ از هر مبحث

۳ ارائه مثال حل‌شده داخل درس‌نامه بلافاصله بعد از میان هر نکته، برای درک بهتر.

۴ پاسخ‌های تشریحی جذاب که گاهی با ارائه راه دوم یا راه سوم، سعی شده راه حل‌های خلاقانه و ایده‌های زیبا در حل مسائل بیان بشه.

۵ ستاره‌داربودن کادر درس‌نامه‌ها، برای بیان اهمیت اون درس‌نامه در کنکور

از این نکته هم غافل نباشید که اگرچه تنوع و حل مسائل مختلف مهمه، اما مهم‌تر از اون کیفیت تسلط به سؤالات هست، یعنی اگر یک کتاب تست رو خیلی خوب کار کنید، بهتر و مؤثرتر هست تا این‌که چندین کتاب مختلف رو سطحی مطالعه و تمرین کنید، پس اگر احساس می‌کنید از مطالعاتی که انجام دادید راضی نیستید، این کتاب رو اون‌قدر تمرین کنید تا کاملاً به تست‌ها مسلط شوید.

متواضعانه ازتون می‌خوام نظر، پیشنهاد و انتقاد خودتون رو از طریق این ID برای من بفرستید.

📧 📧 mahdiazizi_math

و در نهایت:

سپاس از همسر عزیزم که حضورش پشتوانه‌ای بس عظیم برای من است.

سپاس از مدیریت محترم انتشارات خیلی سبز، جناب آقای دکتر نصری

سپاس از مدیر تألیف این کتاب، دوست عزیزم جناب آقای مهندس نوید شاهی

سپاس از استاد محسن فراهانی که بدون همکاری و صبوری ایشان، تألیف این کتاب ممکن نبود.

فهرست

۷	تابع	فصل اول
۴۴	مثلاث	فصل دوم
۶۹	حد و پیوستگی	فصل سوم
۹۱	مشتق	فصل چهارم
۱۰۸	کاربرد مشتق	فصل پنجم
۱۲۲	هندسه، تفکر تجسمی و مقاطع مخروطی	فصل ششم
۱۳۳	شمارش و احتمال	فصل هفتم
۱۶۰	تعیین علامت و نامعادله	فصل هشتم
۱۶۸	معادلات و سهمی	فصل نهم
۱۸۲	توابع نمایی و لگاریتم	فصل دهم
۱۹۰	توان‌های گویا و عبارت‌های جبری	فصل یازدهم
۱۹۵	مجموعه، الگو و دنباله	فصل دوازدهم

۲۰۲

هندسه تحلیلی

فصل سیزده

۲۰۷

هندسه (نالس و تشابه)

فصل چهارده

۲۱۸

آمار

فصل پانزده

۲۲۴

آزمون‌های جامع

۲۳۰

پاسخنامه تشریحی

۳۰۶

پاسخنامه کلیدی

مَدابوک

تعیین علامت و نامعادله

فصل ۱

در یک کلام، آچار فرانسه است. در فصل تابع، حد، کاربرد مشتق حسابی به کار میاد. **پیش از این فصل:** اتحادها و خواص نامساویها، نمودار قدر مطلق و رادیکال **مهمترین بحث این فصل:** نامعادلات گویا **فصلهای مشتق با کتاب درسی:** فصل ۴ ریاضی ۱

۱ تعیین علامت توابع درجه ۱ یا درجه ۲

علامت $f(x)$ اگر نمودار تابع $f(x)$ را در اختیار داشته باشیم، در این صورت:

نمودار تابع f بالای محور x ها است. $f(x) > 0 \Rightarrow$

نمودار تابع f با محور x ها برخورد می کند. $f(x) = 0 \Rightarrow$

نمودار تابع f پایین محور x ها است. $f(x) < 0 \Rightarrow$

نکته ۱: علامت چندجمله ای درجه اول به صورت $P(x) = ax + b$ در اطراف ریشه اش عوض می شود که در جدول تعیین علامت، علامت خانه اول از سمت راست، همان علامت a (ضریب x) است:

نمونه	ویژگی	نمودار	$P(x) = ax + b$
$\begin{array}{c c} x & 3 \\ \hline 2x-6 & - \quad \quad + \end{array}$	شیب مثبت ($a > 0$)		$\begin{array}{c c} x & \frac{b}{a} \\ \hline P(x) & - \quad \quad + \end{array}$
$\begin{array}{c c} x & 3 \\ \hline 3-x & + \quad \quad - \end{array}$	شیب منفی ($a < 0$)		$\begin{array}{c c} x & \frac{b}{a} \\ \hline P(x) & + \quad \quad - \end{array}$

نکته ۲: علامت چندجمله ای درجه دوم $P(x) = ax^2 + bx + c$ برحسب تعداد ریشه هایش سه حالت دارد:

حالت اول: اگر فاقد ریشه باشد ($\Delta < 0$)، علامت آن همواره موافق علامت a است:

اصطلاح	نمونه جدول تعیین علامت	نمودار	$ax^2 + bx + c$
همواره مثبت	$\begin{array}{c c} x & -\infty \quad \quad +\infty \\ \hline x^2+1 & + \end{array}$		$a > 0$
همواره منفی	$\begin{array}{c c} x & -\infty \quad \quad +\infty \\ \hline -x^2+x-1 & - \end{array}$		$a < 0$

حالت دوم: اگر ریشه مضاعف (دو ریشه مساوی) داشته باشد ($\Delta = 0$)، علامت در اطراف ریشه عوض نمی شود و علامت آن همواره همان علامت a است.

اصطلاح	نمونه	جدول تعیین علامت	نمودار	$ax^2 + bx + c$
نامنفی	$\begin{array}{c c} x & 2 \\ \hline x^2-4x+4 & + \quad \quad + \end{array}$	$\begin{array}{c c} x & \frac{b}{2a} \\ \hline P(x) & + \quad \quad + \end{array}$		$a > 0$
نامثبت	$\begin{array}{c c} x & 1 \\ \hline -x^2+2x-1 & - \quad \quad - \end{array}$	$\begin{array}{c c} x & \frac{b}{2a} \\ \hline P(x) & - \quad \quad - \end{array}$		$a < 0$

حالت سوم: اگر چندجمله‌ای درجه دوم، دارای دو ریشه حقیقی متمایز باشد، علامت چندجمله‌ای در اطراف ریشه‌ها عوض می‌شود که باز هم علامت اولین خانه از سمت راست در جدول، همان علامت ضریب x^2 یعنی علامت a است.

نمونه	جدول تعیین علامت	نمودار	$ax^2 + bx + c$
	$\begin{array}{c ccc} x & & -1 & 2 \\ \hline x^2 - x - 2 & + & - & + \end{array}$		$a > 0$
	$\begin{array}{c ccc} x & & -2 & 2 \\ \hline 4 - x^2 & - & + & - \end{array}$		$a < 0$

وایسانون! هواسست به تفاوت دو مورد زیر باشد:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c|cc} x & 5 \\ \hline P(x) & - & + \end{array} \Rightarrow \text{مثلاً } P(x) = x - 5 \text{ یا } 5 - x \xrightarrow{\text{خانه اول از راست}} P(x) = x - 5 \\ \begin{array}{c|cc} x & 5 \\ \hline P(x) & + & + \end{array} \Rightarrow \text{مثلاً } P(x) = (x - 5)^2 \end{array}$$

- ۴۵۹- جدول تعیین علامت عبارت $P(x) = (m+1)x^2 + 6x + m - 7$ به شکل روبه‌رو است. مقدار $m + n$ کدام است؟
- | | |
|--------|-------------|
| x | n |
| $P(x)$ | $- \quad -$ |
- ۱ (۱) $-1 (2)$
۱۱ (۳) $-11 (4)$
- ۴۶۰- اگر نامساوی $(m+1)x^2 - 8x + m + 1 \leq 0$ به ازای همه مقادیر x برقرار باشد، حدود m کدام است؟
- $m > -1 (4)$ $m < -1 (3)$ $m \leq -5 (2)$ $-5 \leq m < -1 (1)$
- ۴۶۱- اگر جدول تعیین علامت عبارت $P(x) = ax + b$ به شکل زیر باشد، جدول تعیین علامت عبارت $f(x) = a - bx$ کدام است؟ (برگرفته از تمرین کتاب درسی)

$\begin{array}{c cc} x & 3 \\ \hline P(x) & + & - \end{array}$	$\begin{array}{c cc} x & \frac{1}{3} \\ \hline f(x) & - & + \end{array} (2)$	$\begin{array}{c cc} x & \frac{1}{3} \\ \hline f(x) & + & - \end{array} (1)$
$\begin{array}{c cc} x & -\frac{1}{3} \\ \hline f(x) & - & + \end{array} (4)$	$\begin{array}{c cc} x & -\frac{1}{3} \\ \hline f(x) & + & - \end{array} (3)$	

۲ تعیین علامت چندجمله‌ای‌ها در حالت کلی

برای تعیین علامت چندجمله‌ای‌ها با هر درجه دلخواه به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

مرحله	تعیین علامت سریع
۱	عبارت را تجزیه می‌کنیم تا ریشه‌ها به دست آیند. $P(x) = x(x^2 - 3x)(4 - x^2)(x + 2)^2 = x^2(x - 3)(2 - x)(2 + x)^4$ $\begin{array}{c} \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ x=0 \quad x=3 \quad x=2 \quad x=-2 \\ \text{ریشه مضاعف} \end{array}$
۲	ریشه‌ها را در جدول، به ترتیب از چپ به راست (و از کوچک به بزرگ) می‌نویسیم. $\begin{array}{c cccc} x & -2 & 0 & 2 & 3 \\ \hline P(x) & & & & \end{array}$
۳	علامت ضریب جمله‌ای که بیشترین درجه را دارد، همان علامت خانه اول، از سمت راست است. این چندجمله‌ای از درجه ۸ است و جمله با بزرگ‌ترین درجه آن $-x^8$ است؛ پس علامت خانه اول از سمت راست «منفی» است. $\begin{array}{c cccc} x & -2 & 0 & 2 & 3 \\ \hline P(x) & & & & - \end{array}$

مرحله	تعیین علامت سریع
۴	علامت‌ها از سمت راست، یکی‌درمیان عوض می‌شوند، به‌جز در ریشه‌های مضاعف (تکراری) که علامت تغییر نمی‌کند.

$P(x) = x(x^2 - 3x)(4 - x^2)(x + 2)^3$

x	-2	0	2	3
$P(x)$	$-$	$-$	$-$	$+$

نمودار $P(x)$ شبیه این می‌شود

دقت کنید که چون علامت خانه اول از سمت راست در جدول منفی است؛ یعنی شاخه سمت راست نمودار (برای $x > 3$) زیر محور x ‌ها قرار دارد.

۴۶۲- جدول تعیین علامت عبارت $P(x) = x^3 + ax^2 + 5x + b$ به صورت روبه‌رو است. حاصل $a \times b$ کدام است؟

x	-2	-1
$P(x)$	$-$	$+$

۸ (۲)
۶ (۳)
۸ (۴)
۶ (۱)

۴۶۳- عبارت $P(x) = (x^2 - 4x + 3)(2x^2 + ax + b)$ همواره نامنفی است. $a - b$ کدام است؟

x	-2	-1
$P(x)$	$-$	$+$

۲ (۱)
۱۴ (۲)
۱۴ (۳)
۲ (۴)

۴۶۴- اگر نمودار تابع $f(x)$ به صورت زیر باشد، آن‌گاه عبارت $y = f(x)(x^2 - 5x + 4)$ در بازه (a, b) مثبت است. بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

۴ (۱)
۳ (۲)
۲ (۳)
۱ (۴)

تعیین علامت عبارات گویا

تعیین علامت یک عبارت کسری گویا، شبیه تعیین علامت چندجمله‌ای‌ها است، فقط بدانید:

- ریشه‌های مخرج کسر، عبارت را تعریف‌نشده می‌کنند.
- ریشه‌های صورت کسر، عبارت را صفر می‌کنند.
- این‌جا هم علامت خانه اول از سمت راست، از ضرب علامت ضریب بزرگ‌ترین درجه هر عبارت، به دست می‌آید، فقط در نهایت علامت صورت را به علامت مخرج تقسیم می‌کنیم. (یا این‌که حاصل عبارت گویا را به ازای عددی دلخواه و بزرگ‌تر از بزرگ‌ترین ریشه، مشخص می‌کنیم).
- علامت‌ها از سمت راست یکی‌درمیان عوض می‌شوند، به‌جز در ریشه‌های مضاعف (تکراری).

مثلاً عبارت گویای $P(x) = \frac{4 - x^2}{x^3 - 2x^2 + x}$ را تعیین علامت می‌کنیم:

ابتدا صورت و مخرج را تجزیه و ریشه‌یابی می‌کنیم:

$$P(x) = \frac{(2-x)(2+x)}{x(x-1)^2}$$

فقط $x = 1$ ریشه مضاعف است. ضمناً علامت ضریب بزرگ‌ترین درجه‌ها در صورت $(-x^2)$ و در مخرج (x^3) را که ضرب کنیم، حاصل منفی می‌شود:

x	-2	0	1	2
$P(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$

یا مثلاً به ازای عددی بزرگ‌تر از ۲، مثلاً $x = 3$ حاصل $P(x)$ منفی می‌شود، پس خانه اول از سمت راست منفی خواهد بود.

وایسانو! اگر یک عدد هم ریشه صورت باشد هم ریشه مخرج، چه کنیم؟

صورت و مخرج رو ساده کنید، فقط بدونید اون عدد عضو دامنه عبارت نیست، مثلاً به تعیین علامت زیر دقت کنید:

$$\frac{x(x-2)}{(x+1)(x-2)} > 0 \xrightarrow{x \neq 2} \frac{x}{x+1} > 0 \Rightarrow \frac{-1}{+} \quad \frac{0}{-} \quad \frac{+}{+} \Rightarrow x < -1 \text{ یا } x > 0 \xrightarrow{x \neq 2} x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty) - \{2\}$$

۴۶۵- عبارت $P(x) = \frac{(2x^2 - 3x - 5)(x+1)}{(x^2 + x + 1)(1-x)}$ در بازه (a, b) مثبت است. بزرگ‌ترین مقدار $b - a$ کدام است؟

۲/۵ (۴)

۲ (۳)

۱/۵ (۲)

۱ (۱)

۴۶۶- جدول تعیین علامت عبارت $P(x) = \frac{(x+d)(x-a)^2}{ax^2 + bx + c}$ به صورت زیر است. مقدار $a + b + c + d$ کدام است؟

x	$-\frac{1}{2}$	0	4
$P(x)$	$-$	$-$	$+$

۷ (۱)

۸ (۲)

۹ (۳)

۱۰ (۴)

۴۶۷- عبارت $A = \frac{(m-2)x^2 + 6x + 2m-1}{-x^2 - 2x - 7}$ به ازای هر x منفی است. حدود m کدام است؟

$m > 3/5$ (۲)

$m < -1$ (۱)

$2 < m < 3/5$ (۴)

$m > 2/5$ (۳)

۴۶۸- فرض کنید مجموعه جواب نامعادله $\frac{((m^2-1)x^2 - 4mx + 4)(x - 3\sqrt{x} + 2)}{2x - 3} > 0$ ، به ازای $x > \frac{3}{2}$ ، بازه $(2, 4)$ باشد. مقدار m کدام است؟

(ریاضی ۱۴۰۰)

۲ (۴)

۱ (۳)

صفر (۲)

-۲ (۱)

(تجربی ۱۴۰۱)

۸ (۴)

۷ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

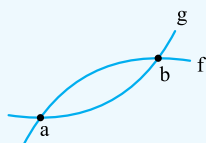
۴۶۹- اگر $\frac{4-2x}{3x+1} \geq 0$ باشد، مجموعه مقادیر $[3x]$ چند عضو دارد؟

۴ نامعادلات چندجمله‌ای

برای حل نامعادلات چندجمله‌ای به فرم $f(x) > g(x)$ یا $f(x) < g(x)$ دو راه اصلی وجود دارد:

راه اول: نامعادله را به شکل $f(x) - g(x) > 0$ نوشته، آن را ساده کرده و عبارت نهایی را تعیین علامت کنیم.

راه دوم: با استفاده از رسم نمودار توابع فرض $f(x)$ و $g(x)$ ببینیم:



۱ کجا یکدیگر را قطع کرده‌اند $x = b, x = a \Leftrightarrow f(x) = g(x) \Leftrightarrow$

۲ کجا نمودار f بالای نمودار g است $a < x < b \Leftrightarrow f(x) > g(x) \Leftrightarrow$

۳ کجا نمودار f پایین نمودار g است $x < a$ یا $x > b \Leftrightarrow f(x) < g(x) \Leftrightarrow$

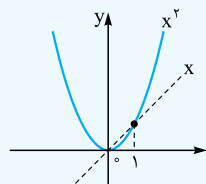
مثلاً: فرض کنید $f(x) = x^2$ و $g(x) = x$ در این صورت:

$$f(x) > g(x) \xrightarrow{\text{یعنی}} x^2 > x \xrightarrow{\text{یعنی}} x^2 - x > 0 \Rightarrow x(x-1) > 0 \Rightarrow \begin{array}{c|c|c} + & - & + \\ \hline x < 0 & 0 & x > 1 \end{array}$$

طبق شکل دقیقاً در فواصل $x > 1$ یا $x < 0$ نمودار $y = x^2$ بالای نمودار $y = x$ است.

بدیهی است که در فاصله $0 < x < 1$ ، نمودار $y = x^2$ پایین نمودار $y = x$ است؛ یعنی جواب نامعادله $x^2 < x$

همان جواب نامعادله $x^2 - x < 0$ ؛ یعنی بازه $0 < x < 1$ است.



نکته نوب: اگر دو تابع f و g پیوسته باشند، بازه جواب نامعادلاتی به فرم $f(x) < g(x)$ یا $f(x) > g(x)$ از نقاط

برخورد دو تابع f و g ساخته می‌شود:

$$x^2 = x \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

یعنی جواب نامعادلات $x^2 > x$ یا $x^2 < x$ بازه‌هایی هستند که اول و آخر آن‌ها $x = 0$ یا $x = 1$ است.

(تجربی خارج ۹۹)

۴۷۰- در بازه (a, b) ، نمودار تابع $y = (x-1)^2$ بالاتر از نمودار تابع $y = 4x^4$ است. بیشترین مقدار $b - a$ ، کدام است؟

$\frac{3}{2}$ (۲)

۱ (۱)

$\frac{5}{2}$ (۴)

۲ (۳)

هنگام حل نامعادلات به صورت $f(x) > g(x)$ یا $f(x) < g(x)$ اگر f یا g کسری باشند، حق طرفین وسطین کردن نداریم، بلکه باید همه عبارات را به یک طرف برده، ساده کنیم و تعیین علامت کنیم، مگر در یک حالت: عبارت منفرجه همواره مثبت یا همواره منفی باشد. (در حالت منفی، بعد از طرفین وسطین کردن، جهت نامعادله عوض می‌شود).

مثلاً نامعادلات زیر را ببینید:

$$1 \quad \frac{2x}{x+3} \leq 1 \Rightarrow \frac{2x}{x+3} - 1 \leq 0 \xrightarrow{\text{منفرجه مشترک}} \frac{x-3}{x+3} \leq 0 \Rightarrow \begin{array}{c} -3 \quad 3 \\ + \quad - \quad + \\ \text{تن} \end{array} \Rightarrow -3 < x \leq 3$$

$$2 \quad \frac{4x}{x^2+3} \leq 1 \xrightarrow[\text{طرفین وسطین}]{\text{منفرجه همواره مثبت}} 4x \leq x^2+3 \Rightarrow x^2-4x+3 \geq 0 \Rightarrow (x-1)(x-3) \geq 0 \Rightarrow \begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ + \quad - \quad + \end{array} \quad x \leq 1 \text{ یا } x \geq 3$$

وایسازو! هنگام حل نامعادلات، اگر جواب نامعادله در گزینه‌ها به صورت «بازه» بیان شده باشد، می‌توانیم با امتحان گزینه‌ها، سوال رو حل کنیم؛ یعنی، «عددی که باعث تفاوت بین گزینه‌ها می‌شود رو انتقاب و در نامعادله بک کنیم».

مثلاً جواب نامعادله $\frac{3x+1}{2x-6} < 1$ را از بین گزینه‌های زیر مشخص می‌کنیم:

$$(-\infty, -7) \cup (3, \infty) \quad (4) \quad (-7, 3) \quad (3) \quad (3, \infty) \quad (2) \quad (-\infty, -7) \quad (1)$$

عددی انتخاب می‌کنیم که بین گزینه‌ها تفاوت ایجاد کند، مثلاً $x = 4$ که در بعضی گزینه‌ها هست ولی در بعضی‌ها نیست:

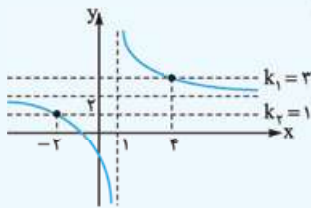
$$x = 4 \Rightarrow \frac{12+1}{8-6} < 1 \Rightarrow \frac{13}{2} < 1 \Rightarrow \text{نادرست} \Rightarrow (4) \text{ و } (3) \text{ رد}$$

حالا برای بررسی تفاوت گزینه‌های (1) و (3) می‌توانیم $x = 0$ را امتحان کنیم:

$$x = 0 \Rightarrow \frac{0+1}{0-6} < 1 \Rightarrow -\frac{1}{6} < 1 \Rightarrow \text{درست} \Rightarrow \text{گزینه } (3) \text{ عدد } x = 0 \text{ را دارد}$$

نکته نوب در نامعادلاتی به شکل $k_1 < \frac{ax+b}{cx+d} < k_2$ ، اگر نامساوی‌ها را به مساوی تبدیل کنیم، x ‌های به دست آمده از معادلات

$$k_1 = \frac{ax+b}{cx+d} \text{ و } k_2 = \frac{ax+b}{cx+d} \text{ اعداد ابتدا یا انتهای بازه جواب نامعادله هستند. مثلاً جواب نامعادله } \frac{2x+1}{x-1} < 3 \text{، یعنی فواصلی که نمودار}$$



$$\begin{aligned} \frac{2x+1}{x-1} = 1 &\Rightarrow 2x+1 = x-1 \Rightarrow x = -2 \\ \frac{2x+1}{x-1} = 3 &\Rightarrow 2x+1 = 3x-3 \Rightarrow x = 4 \end{aligned}$$

برای $x > 4$ یا $x < -2$ نمودار تابع بین دو خط $y = 1$ و $y = 3$ قرار دارد.

پس جواب نامعادله $\frac{2x+1}{x-1} < 3$ به شکل $(-\infty, -2) \cup (4, +\infty)$ است و اعداد -2 و 4 ریشه‌های معادلات $\frac{2x+1}{x-1} = 3$ هستند.

(تجربی خارج ۹۸)

$$471- \text{مجموعه جواب نامعادله } \frac{7x-8}{x^2-x-2} > \frac{x}{x-2} \text{، به صورت بازه، کدام است؟}$$

$$(2, 4) \quad (2) \quad (-4, 2) \cup (2, 3) \quad (1)$$

$$(-1, 2) \cup (2, 4) \quad (3) \quad (-1, 2) \quad (4)$$

$$472- \text{نمودار تابع با ضابطه } f(x) = \frac{3x^2-2x}{x^2+4} \text{، در بازه } (a, b) \text{ پایین‌تر از خط به معادله } y = 2 \text{ است. بیشترین مقدار } b-a \text{ کدام است؟}$$

$$\infty \quad (4) \quad 8 \quad (3) \quad 6 \quad (2) \quad 4 \quad (1)$$

(تجربی ۹۹)

$$473- \text{مجموعه جواب نامعادله } \frac{x+1}{2x-1} < 1 \text{، کدام است؟}$$

$$(0, 8, 2) \quad (4) \quad (1, 2) \quad (3) \quad (0, 8, 1, 2) \quad (2) \quad (0, 6, 1, 5) \quad (1)$$

(تجربی خارج ۱۴۰۱)

$$474- \text{اگر } -2 < \frac{1-3x}{x+1} < 2 \text{ باشد، مجموعه مقادیر } \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor \text{ چند عضو دارد؟}$$

$$4 \quad (4) \quad 3 \quad (3) \quad 2 \quad (2) \quad 1 \quad (1)$$

(ریاضی نوبت اول ۱۴۰۲)

$$475- \text{نمودار تابع } y = \frac{2}{x^2-3x+2} \text{، به ازای چند مقدار صحیح بین دو خط افقی } y = 0 \text{ و } y = -2 \text{ واقع می‌شود؟}$$

$$4 \quad (4) \quad 4 \quad (3) \quad 3 \quad (2) \quad 1 \quad (1)$$

۶ نامعادلات رادیکالی

برای حل نامعادلات شامل رادیکال:

راه اول: با توجه به فرجه رادیکال شرط تعریف شده بودن عبارت داده شده را چک می کنیم، سپس با توان رسانی، رادیکال را حذف کرده و نامعادله را حل می کنیم. در نهایت بین دامنه و X های به دست آمده از حل نامعادله اشتراک می گیریم.

$$\sqrt{a} > b \xrightarrow{\text{شرط}} a \geq 0 \xrightarrow{\text{حالا}} \text{طرفین به توان ۲} \rightarrow$$

$$\sqrt{a} < b \xrightarrow{\text{شرط}} \begin{cases} a \geq 0 \\ b > 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{حالا}} \text{طرفین به توان ۲} \rightarrow$$

راه دوم: استفاده از رسم شکل و این که «کجا! کدام نمودار بالاتر یا پایین تر هست».

راه سوم: اگر جواب نامعادله در گزینه ها به شکل بازه بود ← امتحان گزینه ها

مثلاً: نامعادله $\sqrt{x+3} < x+1$ را حل می کنیم:

راه اول: اولاً: شرط تعریف عبارت را به دست می آوریم:

$$\begin{cases} x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3 \\ x+1 > 0 \Rightarrow x > -1 \end{cases} \xrightarrow{\cap} x > -1 \quad (I)$$

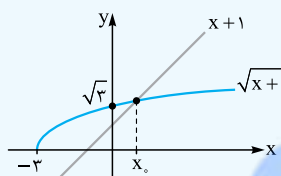
$$x+3 < (x+1)^2 \Rightarrow x+3 < x^2+2x+1$$

ثانیاً: طرفین را به توان ۲ می رسانی:

$$\Rightarrow x^2+x-2 > 0 \Rightarrow (x+2)(x-1) > 0 \Rightarrow \begin{matrix} -2 & 1 \\ + & - & + \end{matrix} \Rightarrow x < -2 \text{ یا } x > 1 \quad (II)$$

حالا بین جواب دو مرحله، اشتراک می گیریم:

$$\begin{matrix} \bullet & & \bullet \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{matrix} \xrightarrow{x} \Rightarrow x > 1$$



$$\sqrt{x+3} = x+1 \xrightarrow{\text{تابلو حدس بزن}} x_0 = 1$$

راه دوم: در شکل، x_0 نقطه برخورد دو تابع است:

طبق شکل در بازه $x > 1$ نمودار $y = \sqrt{x+3}$ پایین نمودار $y = x+1$ است.

(برگرفته از کتاب درسی)

۴۷۶- جواب نامعادله $x + \sqrt{x} \leq 6$ کدام است؟

$$[0, 4]$$

$$\mathbb{R} - (0, 4)$$

$$\mathbb{R} - [0, 4]$$

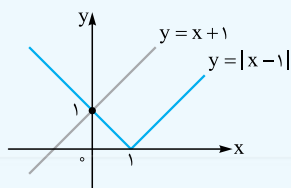
$$(0, 4)$$

۷ نامعادلات قدر مطلق

تیپ اول: نامعادلات کلاسیک

نامعادله	جواب	نمونه
$ u < a$	$a < 0$: جواب ندارد. $a \geq 0$: $-a < u < a$ 	امکان پذیر نیست. $ x+4 < -3$ $ 2x-3 < 5 \Rightarrow -5 < 2x-3 < 5$ $\Rightarrow -2 < 2x < 8 \Rightarrow -1 < x < 4$
$ u > a$	$a \leq 0$: همواره جواب دارد. $a > 0$: $u < -a$ یا $u > a$ 	$ x-5 > -6 \Rightarrow x \in \mathbb{R}$ $\frac{1}{ 2x-1 } \leq \frac{1}{3} \xrightarrow{x \neq \frac{1}{2} \text{ عکس}} 2x-1 \geq 3$ $\Rightarrow 2x-1 \leq -3 \text{ یا } 2x-1 \geq 3 \Rightarrow x \leq -1 \text{ یا } x \geq 2$
$ f(x) \geq g(x) $	به توان ۲ رساندن طرفین	$ x+2 \geq x \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^2+4x+4 \geq x^2$ $\Rightarrow 4x+4 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$
$ f(x) \leq g(x) $	به توان ۲ رساندن طرفین	$ 2x-1 < x-3 \xrightarrow{\text{توان ۲}} (2x-1)^2 < (x-3)^2$ $\Rightarrow (2x-1)^2 - (x-3)^2 < 0$ $\xrightarrow{\text{مزدوج}} (x+2)(3x-4) < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -2 < x < \frac{4}{3}$

تیپ دوم: استفاده از رسم نمودار



مثلاً جواب نامعادله $|x-1| < x+1$ را به دست می‌آوریم. یعنی می‌خواهیم ببینیم در چه بازه‌ای نمودار $y = |x-1|$ پایین نمودار $y = x+1$ قرار دارد. واضح است که $x=0$ طول نقطه برخورد دو نمودار است. در بازه $(0, +\infty)$ نمودار $y = |x-1|$ پایین نمودار $y = x+1$ قرار دارد.

وایسانروا! کماکان اگر گزینه‌ها به صورت بازه بود، از امتحان گزینه‌ها استفاده کنید.

نکته مهم در حل نامعادلاتی به شکل $\frac{\square}{\square} < a$ یا $\frac{\square}{\square} > a$ ، اگر گزینه‌ها بازه‌ای نبود که عددگذاری کنیم، بهتر است با کنارگذاشتن ریشه مخرج این گونه عمل کنیم:

مثلاً جواب نامعادله $\frac{2x+3}{x-1} \geq 1$ را می‌یابیم:

$$\begin{aligned} \xrightarrow{\text{ریشه مخرج } x \neq 1} |2x+3| \geq |x-1| &\xrightarrow{\text{توان } 2} (2x+3)^2 \geq (x-1)^2 \Rightarrow (2x+3)^2 - (x-1)^2 \geq 0 \\ \xrightarrow{\text{مزدوج}} (2x+3+x-1)(2x+3-x+1) \geq 0 &\Rightarrow (3x+2)(x+4) \geq 0 \Rightarrow \begin{array}{c} -4 \quad -\frac{2}{3} \\ + \quad - \quad + \end{array} \\ \text{بنابراین } x \in (-\infty, -4] \cup [-\frac{2}{3}, +\infty) - \{1\} &\text{ می‌باشد.} \end{aligned}$$

تذکره اگر رسم نمودار قدرمطلق سخت بود یا تیپ معروفی نبود، براساس ریشه داخل قدرمطلق، نامعادله را حالت‌بندی می‌کنیم و بین جواب‌ها اجتماع می‌گیریم.

مثلاً نامعادله $|x-2| \geq 3$ را حل می‌کنیم:

ریشه داخل قدرمطلق $x=0$ است:

$$\begin{cases} x \geq 0 \Rightarrow (x-2)x \geq 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 \geq 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) \geq 0 \Rightarrow \begin{array}{c} -1 \quad 3 \\ + \quad - \quad + \end{array} \xrightarrow{x \geq 0} [3, +\infty) \\ x < 0 \Rightarrow (x-2)(-x) \geq 3 \Rightarrow x^2 - 2x + 3 \leq 0 \xrightarrow{\Delta < 0} \emptyset \Rightarrow \text{همواره مثبت است.} \end{cases}$$

بنابراین جواب نامعادله به این شکل است:

$$\emptyset \cup [3, +\infty) = [3, +\infty)$$

(برگرفته از کتاب درسی)

۴۷۷- مجموعه جواب نامعادله $x^2 - mx + n \geq 0$ به صورت $|x-4| \geq 3$ است. حاصل $m+n$ کدام است؟

- ۱۵ (۱) ۱۴ (۲) ۱۶ (۳) ۱۳ (۴)

۴۷۸- مجموعه جواب نامعادله $|x^2 - 2x| < x$ کدام است؟

- (۰, ۱) (۱) (۰, ۳) (۲) (۱, ۲) (۳) (۱, ۳) (۴)

۴۷۹- مجموعه جواب نامعادله $\left| \frac{2-x}{2x-3} \right| > 1$ ، به صورت کدام بازه است؟

- (۱, $\frac{3}{2}$) (۱) $(1, \frac{5}{3}) - \{\frac{3}{2}\}$ (۲) $(\frac{3}{2}, \frac{5}{3})$ (۳) $(\frac{5}{3}, 2)$ (۴)

(تجربی ۹۹)

۴۸۰- در بازه (a, b) ، نمودار تابع با ضابطه $y = |2x^2 - 4|$ در زیر خط $y = 2x$ واقع است. بیشترین مقدار $b-a$ ، کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۴۸۱- مجموعه جواب نامعادله $|x^2 + 1| > |x-2| + 2x + 1$ ، به صورت کدام بازه است؟

- (-۲, ۱) (۱) (-۱, ۱) (۲) (-۱, ۲) (۳) (۱, ۲) (۴)

۴۸۲- در بازه (a, b) ، نمودار تابع $y = \sqrt{x+3}$ ، در بالای نمودار تابع $f(x) = |x-1| - 2$ قرار دارد. بیشترین مقدار $(b-a)$ کدام است؟

- ۶ (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴)

۴۸۳- مجموع اعداد صحیحی که در مجموعه جواب‌های نامعادله $||x-1| - 3| < 4$ قرار دارند، کدام است؟

- ۱۳ (۱) ۷ (۲) ۶ (۳) صفر (۴)

۴۸۴- مجموعه جواب نامعادله $|x+1| + |x-7| > 6$ به کدام صورت است؟

- $\mathbb{R}$ (۱) $\emptyset$ (۲) $|x-3| < 3$ (۳) $|x-2| < 1$ (۴)

(تجربی نوبت اول ۱۴۰۲)

۴۸۵- در بازه (a, b) عبارت $14x^2 + 73x + 14$ منفی و عبارت $|\frac{x-1}{3}| - 1$ بزرگ‌تر از سه است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

- $\frac{5}{3}$ (۱) $\frac{23}{3}$ (۲) $\frac{4}{15}$ (۳) $\frac{67}{15}$ (۴)

آزمون

برای مشاهده پاسخ‌های تشریحی این آزمون، QR Code صفحه شناسنامه را اسکن کنید.

۱- به ازای چه مقادیری از m ، جدول تعیین علامت عبارت $f(x) = (m^2 - m - 2)x^2 + (m - 1)x + \frac{1}{4}$ به صورت زیر است؟

x	x_1	x_2	
$f(x)$	-	+	-
			(۱) $(-\infty, 3)$
			(۲) $(2, 3)$
			(۳) $(-1, 3)$
			(۴) $(-1, 2)$

۲- نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^3 - 4x^2 - x + 4$ با شرط $x > -1$ در بازه (a, b) زیر محور x قرار دارد. بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

(برگرفته از تمرین کتاب درسی)

۳- علامت عبارت $P(x) = \frac{ax + 12}{3x + b}$ فقط در بازه $(-1, 6)$ مثبت است. حاصل $a - b$ کدام است؟

- (۱) -۶
(۲) -۲
(۳) -۱
(۴) -۵

۴- مجموعه جواب‌های نامعادله $\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x - 10} \geq 2$ بازه (a, b) است. مقدار $a + b$ کدام است؟

- (۱) ۱۰
(۲) ۱۲
(۳) ۱۳
(۴) ۱۴

۵- در کدام بازه از مقادیر x ، نمودار تابع $f(x) = 5 - |x - 1|$ بالاتر از نمودار تابع $g(x) = |2x|$ قرار دارد؟

- (۱) $(-\frac{4}{3}, 1)$
(۲) $(-\frac{2}{3}, 1)$
(۳) $(-\frac{4}{3}, 2)$
(۴) $(-\frac{2}{3}, 2)$

medabook.com

۴۵۹ **گزینه ۱** اولاً، در اطراف ریشه تغییر علامت نداریم پس،

چندجمله‌ای ریشه مضاعف دارد؛ یعنی $\Delta = 0$ است:

$$6^2 - 4(m+1)(m-7) = 0 \Rightarrow (m+1)(m-7) = 9$$

$$\Rightarrow m^2 - 6m - 16 = 0 \Rightarrow (m-8)(m+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m=8 \\ m=-2 \end{cases}$$

ثانیاً، چون علامت جدول همواره منفی است؛ پس ضریب X^2 منفی بوده، بنابراین $m+1 < 0$ ، یعنی از بین جواب‌های به دست آمده $m = -2$ قبول است.

ثالثاً، عدد n همان ریشه مضاعف چندجمله‌ای درجه دو؛ یعنی $-\frac{b}{2a}$ است:

$$m = -2 \Rightarrow P(x) = -x^2 + 6x - 9 \Rightarrow n = -\frac{6}{2(-1)} = 3$$

بنابراین $m+n=1$ خواهد بود.

می‌توان فرض کرد که: $\Rightarrow f(x) = -(x-1)(x-2)(x-3)^2$

بنابراین ضابطه y می‌تواند این چنین باشد:

$$y = [-(x-1)(x-2)(x-3)^2](x^2 - 5x + 4)$$

$$(x-1)(x-4)$$

$$\Rightarrow y = -(x-1)^2(x-2)(x-4)(x-3)^2$$

حالا این عبارت را تعیین علامت می‌کنیم:

x	1	2	3	4
y	-	-	+	+

$$\xrightarrow{y \text{ مثبت باشد}} a \in (2, 4) \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=4 \end{cases} \Rightarrow b-a=2$$

دقت کنید بازه $(2, 4)$ بزرگ‌ترین بازه‌ای است که y در آن مثبت است؛ پس $b-a$ بیشترین مقدارش $4-2=2$ می‌شود.

ابتدا تمام عبارات را در صورت امکان تجزیه و سپس ریشه‌یابی می‌کنیم:

$$\frac{(2x^2 - 3x - 5)(x+1)}{(x^2 + x + 1)(1-x)} = \frac{[(2x-5)(x+1)](x+1)}{(x^2 + x + 1)(1-x)}$$

$$= \frac{(2x-5)(x+1)^2}{(x^2 + x + 1)(1-x)}$$

دقت کنید $x^2 + x + 1$ ریشه ندارد ($\Delta < 0$) و همواره مثبت است ($a > 0$). حالا می‌خواهیم کسر مثبت باشد، آن را تعیین علامت می‌کنیم:

اولاً، علامت ضرب بزرگ‌ترین درجه پُرانتزها را که درهم ضرب کنیم، منفی می‌شود $\frac{2 \times 1}{1 \times -1} < 0$.

ثانیاً، $x=1$ ریشه مضاعف است و در اطرافش تغییر علامت نداریم:

x	-1	1	$\frac{5}{2}$
P(x)	-	-	+

تن

$$\xrightarrow{P(x) > 0} x \in (1, \frac{5}{2})$$

پس $a=1$ و $b=\frac{5}{2}$ و در نتیجه $b-a=\frac{3}{2}$ است.

اولاً، $x=0$ ریشه ساده صورت و $x=4$ ریشه مضاعف صورت هستند:

$$\begin{cases} x+d=0 \xrightarrow{x=0} d=0 \\ (x-a)^2=0 \xrightarrow{x=4} a=4 \end{cases}$$

ثانیاً، $x=-\frac{1}{4}$ ریشه مضاعف مخرج است؛ پس:

$$a=4 \Rightarrow \text{مخرج} = 4x^2 + bx + c = 4(x + \frac{1}{4})^2 = 4(x^2 + x + \frac{1}{4})$$

$$= 4x^2 + 4x + 1$$

بنابراین $b=4$ و $c=1$ است. در نتیجه $a+b+c+d=9$ است.

چون عبارت کسری A همواره منفی است:

اولاً، ضرب بزرگ‌ترین درجه‌های صورت و مخرج، نسبتشان منفی می‌شود:

$$\frac{m-2}{-1} < 0 \Rightarrow m > 2 \quad (I)$$

ثانیاً، ریشه ندارد؛ پس $\Delta < 0$ است چه در صورت چه در مخرج.

$$ok \quad \Delta = -24 < 0$$

$$\text{صورت: } \Delta = 36 - 4(m-2)(2m-1) < 0$$

$$\Rightarrow -4(m-2)(2m-1) < -36 \Rightarrow (m-2)(2m-1) > 9$$

$$\Rightarrow 2m^2 - 5m - 7 > 0 \Rightarrow (2m-7)(m+1) > 0$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{+} \quad \frac{\frac{7}{2}}{-} \quad \Rightarrow m < -1 \text{ یا } m > \frac{7}{2} \quad (II)$$

طبق سؤال عبارت $(m+1)x^2 - 8x + m+1$ همواره

نامثبت است؛ پس یا ریشه ندارد یا اگر دارد مضاعف است، یعنی $\Delta \leq 0$:

اولاً، دهانه سهمی رو به پایین است، پس: ضرب x^2 منفی است:

$$m+1 < 0 \Rightarrow m < -1 \quad (I)$$

ثانیاً، باید $\Delta \leq 0$ باشد:

$$64 - 4(m+1)(m+1) \leq 0 \Rightarrow -4(m+1)^2 \leq -64$$

$$\Rightarrow (m+1)^2 \geq 16 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} |m+1| \geq 4 \Rightarrow m+1 \leq -4 \text{ یا } m+1 \geq 4$$

$$\Rightarrow m \leq -5 \text{ یا } m \geq 3 \quad (II)$$

بنابراین از اشتراک جواب‌های (I) و (II) خواهیم داشت:

$$x \Rightarrow m < -5$$

عبارت $P(x) = ax + b$ ریشه‌اش $x=3$ بوده و ضرب x

آن یعنی a منفی است (چون علامت خانه اول از سمت راست منفی است)؛ پس می‌توان فرض کرد $P(x) = -x + 3$ است، یعنی $a = -1$ و $b = 3$ می‌باشد.

در این صورت $f(x) = a - bx$ به صورت

x	$-\frac{1}{3}$
f(x)	+

$f(x) = -1 - 3x$ است؛ پس:

ساده و $x = -1$ ریشه مضاعف چندجمله‌ای $P(x)$ هستند؛ پس $P(x)$ که درجه 3 است، شامل $x+2$ و $(x+1)^2$ است.

$$P(x) = (x+2)(x+1)^2 = (x+2)(x^2 + 2x + 1)$$

$$= x^3 + 4x^2 + 5x + 2$$

بنابراین طبق عبارت فوق می‌توان گفت $a=4$ و $b=2$ است و $a \times b = 8$ خواهد بود.

راه دوم: $x = -1$ و $x = -2$ ریشه‌های $P(x)$ هستند، پس:

$$\begin{cases} P(-1) = 0 \Rightarrow a+b=6 \\ P(-2) = 0 \Rightarrow 4a+b=18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow a \times b = 8$$

همواره $P(x)$

نامنفی است؛ پس یا ریشه ندارد یا اگر دارد، ریشه مضاعف دارد.

از آنجایی که $x^2 - 4x + 3$ به شکل $(x-1)(x-3)$ دارای ریشه‌های $x=1$ و $x=3$ است؛ پس $P(x)$ ریشه دارد. حالا باید این ریشه‌ها مضاعف باشند تا تغییر علامت در اطرافشان نداشته باشیم و عبارت همواره نامنفی باشد؛ یعنی باید $x=1$ و $x=3$ در پُرانتز دیگر هم جزء ریشه‌ها باشند تا در کل $(x-1)^2$ و $(x-3)^2$ داشته باشیم:

$$P(x) = (x-1)(x-3)(2x^2 + ax + b) \Rightarrow 2(x-1)(x-3)$$

$$= 2x^2 - 8x + 6 \quad x_1=1, x_2=3$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$a=-8 \quad b=6$$

بنابراین $a-b = -14$ است.

طبق نمودار تابع $f(x)$ ، می‌توان گفت تابع f دارای

ریشه‌های ساده $x=1$ و $x=2$ و ریشه مضاعف $x=3$ است (چون در x بر محور x مماس است).

هم‌چنین شاخه سمت راست نمودار

$f(x)$ زیر محور x قرار دارد؛ یعنی

منفی است، پس ضرب بزرگ‌ترین

درجه $f(x)$ منفی است، بنابراین

$$\Rightarrow \frac{-(x-2)(x-4)}{(x-2)(x+1)} > 0 \xrightarrow{x \neq 2} \frac{-(x-4)}{x+1} > 0$$

$$\xrightarrow{x \neq 2} \frac{-1}{-} \quad \frac{4}{+} \quad \frac{-}{-} \Rightarrow x \in (-1, 4) - \{2\}$$

$$\Rightarrow x \in (-1, 2) \cup (2, 4)$$

راه دوم: چک اعداد دلخواهی از گزینه‌ها:

$$x=3 \Rightarrow \frac{13}{4} > \frac{3}{1} \checkmark \Rightarrow \text{رد گزینه‌های 1 و 2}$$

$$x=0 \Rightarrow \frac{-1}{-2} > 0 \checkmark \Rightarrow \text{رد 3}$$

پس 3 صحیح است.

$$\text{472 نکته 2} \quad \text{باید نامعادله } \frac{3x^2-2x}{x^2+4} < 2 \text{ را حل کنیم، چون مخرج}$$

ریشه ندارد (همواره مثبت است). می‌توانیم طرفین وسطین کنیم:

$$3x^2-2x < 2x^2+8 \Rightarrow x^2-2x-8 < 0$$

$$\Rightarrow (x-4)(x+2) < 0 \Rightarrow \frac{-2}{+} \quad \frac{4}{-} \quad \frac{+}{+}$$

$$\xrightarrow{<} x \in (-2, 4) \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=4 \end{cases} \Rightarrow b-a=6$$

473 نکته 4 راه اول: دو حالت در نظر می‌گیریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x+1}{2x-1} > 1 \Rightarrow \frac{x+1}{2x-1} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{-x+2}{2x-1} > 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{-} \quad \frac{2}{+} \quad \frac{-}{-} \Rightarrow \frac{1}{2} < x < 2 \quad (I) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x+1}{2x-1} < 3 \Rightarrow \frac{x+1}{2x-1} - 3 < 0 \Rightarrow \frac{-5x+4}{2x-1} < 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{-} \quad \frac{4}{+} \quad \frac{-}{-} \Rightarrow x < \frac{4}{5} \text{ یا } x > \frac{1}{2} \quad (II) \end{array} \right.$$

بین جواب‌های I و II اشتراک می‌گیریم:

$$\Rightarrow \frac{1}{2} < x < 2$$

راه دوم: نامعادله را به معادله تبدیل می‌کنیم:

$$1 = \frac{x+1}{2x-1} \Rightarrow \begin{cases} 1 = \frac{x+1}{2x-1} \Rightarrow x=2 \\ \frac{x+1}{2x-1} = 3 \Rightarrow x = \frac{4}{5} \end{cases}$$

اعداد $\frac{4}{5}$ و 2 باید سر یا ته بازه مجموعه جواب نامعادله باشند.

راه سوم: امتحان گزینه‌ها با عدد دلخواه از بازه‌ها:

$$x=1/5 \Rightarrow 1 < \frac{2/5}{2/5} < 3 \checkmark \Rightarrow \text{رد گزینه‌های 1 و 2}$$

$$x=1 \Rightarrow 1 < 2 < 3 \checkmark \Rightarrow \text{رد 3}$$

4 صحیح است.

$$\text{474 نکته 4} \quad \text{باید } \frac{2}{x^2-3x+2} < 0 \text{ باشد، داریم:}$$

حالت اول:

$$\frac{2}{x^2-3x+2} < 0 \Rightarrow \frac{2}{(x-1)(x-2)} < 0 \Rightarrow \frac{+}{+} \quad \frac{-}{-} \quad \frac{+}{+}$$

اشتراک جواب‌های (I) و (II) این گونه است:

$$\Rightarrow m > \frac{7}{2}$$

468 نکته 2 به ازای $x > \frac{3}{2}$ عبارت مخرج مثبت می‌شود؛ پس

برای این که کل کسر مثبت شود، باید صورت مثبت باشد؛ یعنی در بازه

(2, 4) باید عبارت $((m^2-1)x^2 - 4mx + 4)(x - 3\sqrt{x} + 2)$ مثبت

باشد.

$$\frac{2}{-} \quad \frac{4}{+} \quad \frac{-}{-}$$

اولاً: $x=2$ و $x=4$ ریشه‌های صورت هستند. از آنجایی که $x=4$ ریشه

ریشه $x - 3\sqrt{x} + 2$ است (چون صفرش می‌کند)؛ پس $x=2$ ریشه

$(m^2-1)x^2 - 4mx + 4$ است:

$$(m^2-1)(4) - 4m(2) + 4 = 0 \Rightarrow 4m^2 - 4 - 8m + 4 = 0$$

$$\Rightarrow 4m(m-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m=0 \\ m=2 \end{cases}$$

از آنجایی که خانه اول از سمت راست منفی است؛ پس حاصل ضرب علامت

ضرایب بزرگ‌ترین درجه‌ها باید منفی باشد:

$$(m^2-1)(1) < 0 \Rightarrow m^2 < 1 \Rightarrow |m| < 1 \Rightarrow -1 < m < 1$$

بنابراین $m=0$ بین جواب‌هایمان، قابل قبول است.

469 نکته 4 عبارت $A = \frac{4-2x}{3x+1}$ را تعیین علامت می‌کنیم. ریشه

صورت $x=2$ و ریشه مخرج $x = -\frac{1}{3}$ است. نسبت ضرایب x ها $-\frac{2}{3} < 0$ است؛ پس:

$$\frac{x}{A} \quad \frac{-1/3}{-} \quad \frac{2}{+} \quad \frac{-}{-} \xrightarrow{A \geq 0} -\frac{1}{3} < x \leq 2$$

بنابراین $-1 < 3x \leq 6$ و در نتیجه:

$$[3x] = -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \Rightarrow \text{مقدار 8}$$

دقت کنید گرچه خود -1 در بازه نیست ولی اعداد بین 0 و -1 که در بازه

هستند، جزء صحیح آن‌ها -1 می‌شود.

470 نکته 2 باید نامعادله $(x-1)^2 > 4x^4$ را حل کنیم. از

آنجایی که هر دو تابع پیوسته هستند؛ پس مجموعه جواب نامعادله، بازه‌ای

است که اعداد ابتدا و انتهای آن بازه، طول نقاط برخورد دو نمودار هستند:

$$4x^4 = (x-1)^2 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} 2x^2 = \pm(x-1)$$

$$\begin{cases} 2x^2 = x-1 \Rightarrow 2x^2 - x + 1 = 0 \xrightarrow{\Delta < 0} \text{ جواب ندارد} \\ 2x^2 = -x+1 \Rightarrow 2x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \end{cases}$$

بنابراین بازه $(-\frac{1}{2}, 1)$ بزرگ‌ترین بازه‌ای $(x-1)^2 > 4x^4$

است که نمودار $y = (x-1)^2$ بالای نمودار $y = 4x^4$

خواهد بود؛ پس بیشترین مقدار

$$b-a \text{ برابر با } \frac{1}{2} - (-1) = \frac{3}{2} \text{ است.}$$

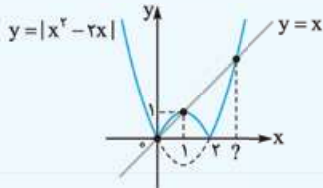
471 نکته 3 راه اول: همه را به یک طرف برده و مخرج مشترک

می‌گیریم:

$$\frac{7x-8}{(x-2)(x+1)} > \frac{x}{x-2} \Rightarrow \frac{7x-8}{(x-2)(x+1)} - \frac{x}{x-2} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{7x-8-x(x+1)}{(x-2)(x+1)} > 0 \Rightarrow \frac{-x^2+6x-8}{(x-2)(x+1)} > 0$$

۴۷۸ **گزینه ۴ راه اول:** رسم نمودار دو طرف نامعادله



طول نقاط برخورد دو نمودار را می‌یابیم:

$$|x^2 - 2x| = x \begin{cases} \text{طبق نمودار} \rightarrow x_1 = 0, x_2 = 3 \\ \text{?} \rightarrow x^2 - 2x = x \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

جواب نامعادله $|x^2 - 2x| < x$ یعنی بازه‌ای که نمودار $y = |x^2 - 2x|$ زیر نمودار $y = x$ باشد، طبق شکل در بازه $0 < x < 3$ این اتفاق افتاده.

راه دوم: امتحان گزینه‌ها با عدد دلخواه از بازه‌ها:

رد $x=1 \Rightarrow |1-2| < 1 \Rightarrow 1 < 1 \times \Rightarrow$ **۲**

رد گزینه‌های **۱** و **۳** $x=2 \Rightarrow |4-4| < 2 \Rightarrow 0 < 2 \checkmark \Rightarrow$

۴ صحیح است.

۴۷۹ **گزینه ۲:** با دقت به ریشه مخرج، طرفین وسطین کرده و به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\left| \frac{2-x}{2x-3} \right| > 1 \xrightarrow{x \neq \frac{3}{2}} |2-x| > |2x-3|$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} (2-x)^2 > (2x-3)^2$$

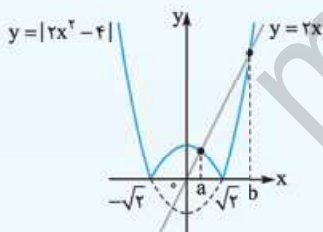
$$(2-x)^2 - (2x-3)^2 > 0 \xrightarrow{\text{مزدوج}} \frac{(x-1)(-3x+5)}{a^2-b^2} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{-} \frac{5}{+} \xrightarrow{>0} 1 < x < \frac{5}{3}$$

از آن جایی که $x \neq \frac{3}{2}$ ، پس:

$$x \in (1, \frac{5}{3}) - \left\{ \frac{3}{2} \right\}$$

۴۸۰ **گزینه ۱:** باید نامعادله $|2x^2 - 4| < 2x$ را حل کنیم. رسم نمودار خیلی خوبه:



در بازه (a, b) نمودار $y = |2x^2 - 4|$ زیر نمودار $y = 2x$ است که a و b طول نقاط تلاقی دو نمودار هستند که یکی قبل از $\sqrt{2}$ و دیگری بعد از $\sqrt{2}$ است. کافی است حدس بزنیم چه اعدادی در قبل و بعد از $\sqrt{2}$ طرف را برابر می‌کنند:

$$|2x^2 - 4| = 2x \begin{cases} \frac{x < \sqrt{2}}{\rightarrow} x = 1 \\ \frac{x > \sqrt{2}}{\rightarrow} x = 2 \end{cases}$$

بنابراین جواب نامعادله، بازه $(1, 2)$ است؛ پس $b - a = 1$ خواهد بود.

۴۸۱ **گزینه ۴ راه اول:** عبارت $x^2 + 1$ همواره مثبت است؛ پس

$$|x^2 + 1| = x^2 + 1$$

$$2x + 1 - |x - 2| > x^2 + 1 \Rightarrow 2x - x^2 > |x - 2|$$

پس باید $1 < x < 2$ باشد تا حاصل کسر منفی شود که در این بازه هیچ عدد صحیحی وجود ندارد؛ پس به حالت دوم هم احتیاجی نیست.

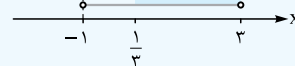
۴۷۵ **گزینه ۲ راه اول:** دو حالت در نظر می‌گیریم:

$$۱) \frac{1-3x}{x+1} > -2 \Rightarrow \frac{1-3x}{x+1} + 2 > 0 \Rightarrow \frac{3-x}{x+1} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{-} \frac{3}{+} \xrightarrow{>0} -1 < x < 3$$

$$۲) \frac{1-3x}{x+1} < 0 \Rightarrow \frac{-1}{-} \frac{1}{+} \xrightarrow{<0} x < -1 \text{ یا } x > \frac{1}{3}$$

حالا بین جواب‌ها اشتراک می‌گیریم:

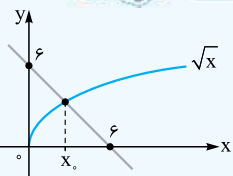


بنابراین $1/3 < x < 3$ و در نتیجه $1/6 < x/2 < 3/2$ بوده که $1/6 < x/2$ یا $[x/2] = 0$ خواهد بود.

راه دوم: تبدیل به معادله:

$$-2 = \frac{1-3x}{x+1} = 0 \Rightarrow \frac{1}{3} < x < 3$$

۴۷۶ **گزینه ۴ راه اول:** رسم نمودار دو طرف نامعادله



$$x + \sqrt{x} \leq 6 - x \Rightarrow \sqrt{x} \leq 6 - x \Rightarrow$$

برای یافتن x باید طول نقطه تلاقی دو نمودار را پیدا کنیم. برای این کار باید معادله $\sqrt{x} = 6 - x$ را حل کنیم. یا طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم، یا این‌که حدس می‌زنیم. x_0 باید عددی باشد که جذر داشته باشد تا دو طرف تساوی $\sqrt{x} = 6 - x$ برابر شوند و طبق نمودار بین 0 و 6 است؛ پس $x_0 = 4$ می‌باشد:

جواب نامعادله $\sqrt{x} \leq 6 - x$ بازه‌ای است که نمودار $\sqrt{x}$ زیر نمودار $6 - x$ باشد یا با آن برخورد کند، که طبق شکل $0 \leq x \leq 4$ خواهد بود.

راه دوم: امتحان گزینه‌ها با عدد دلخواه از بازه‌ها:

رد گزینه‌های **۲** و **۳** $x=1 \Rightarrow 1+1 \leq 6 \checkmark \Rightarrow$

رد $x=4 \Rightarrow 4+2 \leq 6 \checkmark \Rightarrow$ **۱**

۴ صحیح است.

۴۷۷ **گزینه ۱:**

$$|x-4| \geq 3 \Rightarrow x-4 \leq -3 \text{ یا } x-4 \geq 3 \Rightarrow x \leq 1 \text{ یا } x \geq 7$$

پس باید جواب نامعادله $x^2 - mx + n \geq 0$ به صورت $x \leq 1$ یا $x \geq 7$ باشد؛ یعنی علامت عبارت $x^2 - mx + n$ در $(-\infty, 1] \cup [7, +\infty)$ بزرگ‌تر مساوی صفر باشد:

$$\frac{1}{+} \frac{7}{+} \xrightarrow{\text{۷ و ۱ ریشه‌ها هستند}} + \frac{1}{-} \frac{7}{+}$$

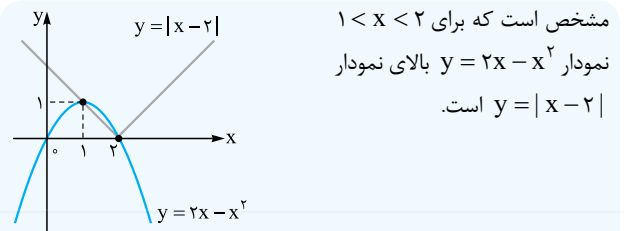
$$x^2 - mx + n = (x-1)(x-7) = x^2 - 8x + 7$$

بنابراین $m = 8$ و $n = 7$ بود؛ پس $m + n = 15$ است.

$$\left| \frac{x-1}{2} - 1 \right| > 3 \Rightarrow \left| \frac{x-3}{2} \right| > 3 \quad (II)$$

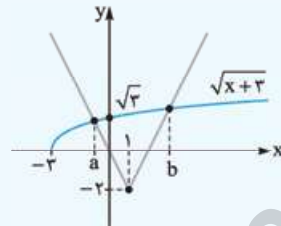
$$\begin{cases} \frac{x-3}{2} > 3 \Rightarrow x > 9 \\ \frac{x-3}{2} < -3 \Rightarrow x < -3 \end{cases}$$

حالا: $(I) \cap (II) \rightarrow -\frac{14}{3} < x < -3 \Rightarrow b-a = \frac{5}{3}$



راه دوم: امتحان گزینه‌ها:

نادرست $x=0 \Rightarrow 0+1-|2| > 0+1 \Rightarrow -1 > 1$
 همه گزینه‌ها $x=0$ را دارند به جز ۴.
 می‌خواهیم نامعادله $\sqrt{x+3} > |x-1| - 2$ را حل کنیم.
 از رسم نمودار استفاده می‌کنیم:

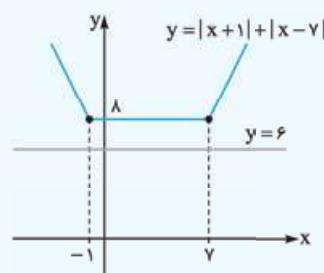


طبق نمودار در بازه (a, b) نمودار $y = \sqrt{x+3}$ بالای نمودار $y = |x-1| - 2$ است که a و b طول نقاط تلاقی دو نمودار هستند:
 $\sqrt{x+3} = |x-1| - 2 \xrightarrow{-3 < a < 0} \sqrt{x+3} = -x+1-2$
 $\Rightarrow \sqrt{x+3} = -x-1 \xrightarrow{\text{حدس}} x = -2$
 $\sqrt{x+3} = |x-1| - 2 \xrightarrow{b > 1} \sqrt{x+3} = x-1-2 \Rightarrow \sqrt{x+3} = x-3$
 $\Rightarrow x = 6$
 پس $(a, b) = (-2, 6)$ ؛ بنابراین $b-a = 8$ است.

وایسایزوا! دقت کنید وقتی حدس زدیم $x=6$ ؛ یعنی عددی پیدا کردیم که وقتی جای x در $\sqrt{x+3}$ قرار می‌گیرد، $x+3$ مربع کامل شود و باعث شود دو طرف تساوی برابر شوند.
 $||x-1| - 3| < 4 \Rightarrow -4 < |x-1| - 3 < 4$
 $\xrightarrow{+3} -1 < |x-1| < 7$
 باید نامعادله $|x-1| < 7$ را حل کنیم:

$$\begin{aligned} -7 < x-1 < 7 &\xrightarrow{+1} -6 < x < 8 \\ \text{صحیح} &\rightarrow x = -5, -4, \dots, 6, 7 \end{aligned}$$

مجموع اعداد فوق برابر با $6+7=13$ می‌باشد، چون از -5 تا 5 همه دوتا دوتا قرینه‌اند و خنثی می‌شوند.



مشخص است که نمودار تابع $y = |x+1| + |x-7|$ همواره بالای خط $y=6$ است؛ پس هر عدد حقیقی می‌تواند جواب نامعادله $|x+1| + |x-7| > 6$ باشد.

$$\begin{aligned} 15x^2 + 73x + 14 < 0 &\Rightarrow \frac{x^2 + 73x + 210}{(x+70)(x+3)} < 0 \\ \Rightarrow (15x + 70)\left(x + \frac{3}{15}\right) < 0 \\ \frac{-14}{3} + \frac{-70}{15} - \frac{3}{15} &\xrightarrow{<0} -\frac{14}{3} < x < -\frac{1}{5} \quad (I) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (m^r - r m + 1) - (m^r - m - r) > 0 \Rightarrow \boxed{m < r}$$

ثانياً: خانه اول از سمت راست منفی است؛ پس ضریب X^2 منفی است:

$$m^r - m - r < 0 \Rightarrow (m - r)(m + 1) < 0$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} -1 \quad 2 \\ + \quad | \quad - \quad | \quad + \\ \Rightarrow \boxed{-1 < m < 2} \end{array}$$

بنابراین از اشتراک دو جواب بالا داریم:

 $\Rightarrow -1 < m < 2$

۲ منفی شود تا نمودارش زیر محور X ها قرار گیرد:

$$X^3 - 4X^2 - X + 4 < 0 \xrightarrow{\text{فاكتور}} X^2(X - 4) - (X - 4) < 0$$

$$\xrightarrow{\text{فاكتور}} (x-4)(x^2-1) < 0 \Rightarrow (x-4)(x-1)(x+1) < 0$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & -1 & 1 & 4 & \\ \hline f & - & + & - & + \end{array} \xrightarrow{\text{منفی } f} x < -1$$

$$6 \quad 1 < x < 4$$

با شرط $x > -1$ بزرگ‌ترین بازه‌ای که نمودار تابع f در آن بازه زیر محور x ‌ها قرار می‌گیرد، بازه $(-1, 4)$ است؛ پس حداکثر $b - a$ برابر با $4 - (-1) = 5$ خواهد بود.

۳ **گزینه ۴** چون علامت $P(x)$ در بازه $(-۱, ۶)$ مثبت است؛ پس $x = -۱$ و $x = ۶$ ریشه‌های صورت و مخرج $P(x)$ هستند، یعنی جدول تعیین علامت $P(x)$ یکی از دو حالت زیر است:

The diagram shows two truth tables for $P(x)$. The left table has columns x , $-$, 6 , and $P(x)$. The right table has columns x , $-$, 6 , and $P(x)$. Both tables show a transition from $-$ to $+$ at $x=6$. The right table has a blue shaded area under the $+$ column.

علامت خانه اول از سمت راست منفی است؛ پس ضریب بزرگترین درجه صورت و مخرج باید نسبتشان منفی شود:

$$a < 0 \Rightarrow \frac{a}{3} < 0$$

از کجا بفهمیم بین $x = -1$ و $x = 6$ کدامیک ریشه صورت است؟ آهان، از آن جایی که باید a منفی به دست بیاد؛ پس $x = 6$ ریشه صورت هست:

$$ax + 12 = 0 \xrightarrow{x=9} 9a + 12 = 0 \Rightarrow a = -\frac{4}{3}$$

$X = -1$ هم ریشه مخرج است:

$$3x + b = 0 \xrightarrow{x=-1} -3 + b = 0 \Rightarrow b = 3$$

بنابراین $a - b = -5$ است.

۴ **گزینه ۲** صورت و مخرج کسر ساده می‌شوند. حواسمان به ریشه مخرج باشد و ساده کنیم:

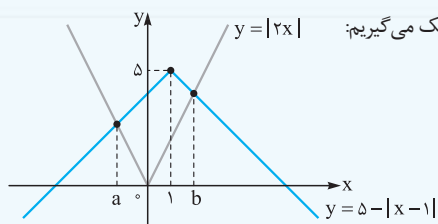
$$\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x - 10} \geq 2 \Rightarrow \frac{(x-3)(x+2)}{(x-5)(x+2)} \geq 2$$

$$\xrightarrow{X \neq -2} \frac{X-3}{X-1} \geq 2 \Rightarrow \frac{X-3}{X-1} - 2 \geq 0$$

$$\xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} \frac{-X+Y}{X-5} \geq 0 \Rightarrow \frac{5}{-} + \frac{Y}{+}$$

$$\xrightarrow{\geq_0} x \in (\delta, \gamma] \Rightarrow b+a = \gamma + \delta = 12$$

۵ گزینہ ۳ راہ اول: می خواہیم نامعادلہ $|x-1| > |2x-5|$ را حل



فصل هشتم

تعیین علامت و نامعادله

۱ گزیده ۴ طبق جدول تعیین علامت $f(x)$:

اولاً: معادله دو ریشه دارد؛ پس $\Delta > 0$:

$$(m-1)^r - (m^r - m - r) \left(\frac{1}{r} \right) > 0$$

می‌خواهیم ببینیم نمودار تابع $y = 5 - |x - 1|$ در چه بازه‌ای بالای نمودار $y = |2x|$ است. طبق نمودار در بازه (a, b) این اتفاق می‌افتد که a و b طول نقاط تلاقی دو نمودار است:

$$5 - |x - 1| = |2x| \begin{cases} \xrightarrow{a < 0} 5 - (-x + 1) = -2x \Rightarrow x = -\frac{4}{3} \\ \xrightarrow{x < 0} \\ \xrightarrow{x > 1} 5 - (x - 1) = 2x \Rightarrow x = 2 \\ \xrightarrow{b > 1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (a, b) = \left(-\frac{4}{3}, 2\right)$$

راه دوم: امتحان گزینه‌ها (به عهده خودتون 😊)