

برای خرید این کتاب از م‌دایوک روی همین جمله کلیک کنید

تقدیم به

خانواده‌های محترم؛

رفعتی، شریف خطیبی، کشوری و سایر بستگان

✍ محمد حسین صابری

«عزیزترین...»

✍ سپهر متولی

یادم است از بچگی همه‌اش به ما می‌گفتند «حاسبوا انفسکم قبل أن تُحاسبوا» و به همین علت اهمیت درس حساب و به ویژه مقوله حساب و کتاب، برایمان خیلی زیاد شد. شما الآن یک «حسابان ۱» دارید و یک «حسابان ۲» و ما آن موقع‌ها یک «حسابان» داشتیم و یک «حساب دیفرانسیل و انتگرال» و این دومی اسمش خیلی دهن پرکن بود و می‌شد کلی پزش را داد. اما راستش را بخواهید به‌جز مبحث انتگرال‌ش که از «حسابان ۲» حذف شده مطالبش همین‌ها بود که شما می‌خوانید. هم آن‌وقت‌ها و هم الآن، برای بچه‌های رشته ریاضی فیزیک، شاید مهم‌ترین درس برای خوب خواندن و یادگرفتن، همین درس حسابان باشد. پایه تمام درس‌های ریاضی دانشگاه مثلاً ریاضی ۱ و ۲ و معادلات دیفرانسیل و ریاضی مهندسی و انواع دیگر ریاضی که قرار است سال‌های بعد در دانشگاه بخوانید، همین مطالب کتاب حسابانتان است و حتماً برای همین است که ضریب این درس در کنکور ریاضی فیزیک شده ۴.

یادم هست از همان سال‌های اولی که بچه‌ها وارد دانشگاه می‌شدند یکی از شوخی‌های رایجشان این بود که «بالآخره نفهمیدیم این حساب دیفرانسیل و انتگرال به چه دردی می‌خوره؟!»

فکر می‌کنم همین شوخی در زمان شما تبدیل شود به این که «بالآخره نفهمیدیم حسابان به چه دردی می‌خوره؟!». راستش را بخواهید حسابان و همین‌طور خیلی درس‌های دیگر خودشان به طور مستقیم در زندگی به هیچ دردی نمی‌خورند اما به طور غیرمستقیم در زندگی شما، ما و خیلی‌های دیگر فایده دارند. همین موضوع «حاسبوا» که اول مقدمه نوشتم اگر چه ممکن است ساده به نظر بیاید ولی خیلی پیچیده و دشوار است. حساب و کتاب قبل از هر چیز شناخت و فهمیدن درست لازم دارد. فهمیدن و دیدن دقیق همه‌چیز، کارهایی که می‌کنیم، فکرهایی که از سرمان می‌گذرد، دلایلی که برای کارهایمان داریم و ... درس خواندن قرار است باعث شود تا نوع و کیفیت نگاهمان به زندگی تغییر کند، باعث شود که دقیق‌تر شویم، باعث شود که در مورد همه‌چیز خوب حساب و کتاب کنیم و ... می‌دانم هر چه‌قدر هم که از این حرف‌ها بزنم باز هم شما به امتحان و نمره‌ای که در امتحان می‌گیرید فکر می‌کنید یا به درصد و رتبه‌ای که در کنکور به دست می‌آورید. سال‌های بعد که در مورد این روزها فکر می‌کنید و به یادشان می‌آورید می‌بینید که همه این‌ها گذشته و چیزی که برایتان مانده است نه نمره است نه رتبه؛ تجربه‌ای است که از زندگی در این دوران، حس‌هایی که داشته‌اید و چیزهایی که یاد گرفته‌اید. شاید نوشتن چنین چیزی در مقدمه کتابی است که در نامش آمده «ماجرای بیست» عجیب باشد، ولی هیچ‌کدام از این‌ها با هم منافاتی ندارند، هم زندگی کنید، هم یاد بگیرید، هم خوب باشید و هم ۲۰ بگیرید.

خوش باشید.

مقدمه^۳ ناشر

کنکوری هستی؟ بزرگ شدیا!!

دوستای بزرگم سلام. می‌خوام یکم دربارهٔ امسال باهاتون صحبت کنم (هووب گوش کنید).

امسال واسهٔ شماها قراره که امتحان نهایی خرداد، تأثیر مستقیم ۶۰٪ روی کنکور داشته باشه و خُب! خداییش درصد زیادیه (تکرار می‌کنم، تأثیر مستقیم ۶۰٪ ای) پس واسهٔ این‌که بتونین توی یه دانشگاه خوب درس بخونید، هم باید تستی بخونید هم تشریحی. به قوی و ضعیف بودن دانش‌آموز هم ربطی نداره، ما امسال توی مدارس خفن هم از بچه‌ها امتحان تشریحی می‌گیریم.

این کتاب رو به پیشنهاد خیلی‌سبز عزیز برای شما و موفقیت شما توی امتحان نهایی نوشتم. ایشالا که تونسته باشم کمکتون کرده باشم.

کتاب ماجرای بیست حسابان دوازدهم اینارو داره:

درس‌نامه: سعی کردم خیلی ساده، روان و کاربردی درس را آموزش بدیم. مطالب اضافه در این کتاب نمی‌بینید اما هر چیزی که برای کسب ۲۰ نهایی لازمه رو دارید. چینش درس‌ها کاملاً مثل کتاب درسیه، البته بیشتر جاها برای این‌که مطالب، طولانی نشه و حوصله‌تون سر نره، درس به چند بخش تقسیم شده و سؤال‌های هر قسمت رو جداگونه آوردیم.

سؤال‌های امتحانی: همه مثال‌ها و تمرین‌های کتاب و کار در کلاس‌ها، فعالیت‌ها و همهٔ سؤال‌های نهایی خرداد ۱۴۰۲ و ۱۴۰۳ توی این کتاب موجوده و به قول معروف پوشش کامل کتاب درسی و امتحان‌های نهایی یه جوری رعایت شده که بعد خوندن «ماجرای بیست» دیگه هیچ نگرانی‌ای ندارید که چیزی جا افتاده باشه. سؤال‌هایی که کنار آن‌ها علامت  است، سطح دشوارتری نسبت به بقیهٔ سؤال‌ها داره و شما رو برای سؤال‌های سخت نهایی آماده می‌کنه.

آزمون‌های انتهایی هر فصل: بعد از تمام شدن هر فصل، خوب است خودتان را با یک آزمون نسبتاً دشوار محک بزنید. اگر در حل سؤال‌ها اشکالات زیادی داشتید، بدانید که باید دوباره به درس‌نامه و سؤال‌های امتحانی فلش‌بک بزنید.

پاسخ‌های تشریحی: بعد از حل سؤال‌ها، حتماً پاسخ‌ها را تحلیل کنید.

آزمون‌های پایانی کتاب: در انتهای کتاب، دو امتحان ترم اول داریم و چهارتا امتحان ترم دوم. حتماً قبل امتحان نهایی این سؤال‌ها رو حل کنید و به بارم‌بندی اون‌ها هم توجه کنید که بدونید باید چجوری توی امتحان جواب بدی.

کلام آخر

تشکر ویژه از اساتید عزیزم، مهندس مجید رفعتی (آقای حسابان)، مهندس محمد کشوری ، مهندس علی‌رضا شریف خطیبی (پدر معنوی من)، دکتر کامبیز مقدم‌فر و استاد علی مؤمن‌زاده.

تشکر خیلی صمیمانه از همسر مهربانم که واقعاً در مدت تألیف من رو تحمل کرد و همچنین همهٔ دانش‌آموزها و مدرسی که نتونستم اون موقع در خدمتشون باشم. در نهایت هر پیشنهاد و انتقادی راجع به کتاب رو حتماً به ما بگید.

سپهر متولی و محمدحسین صابری

@mathmots :راه ارتباطی

فهرست

فصل پنجم: کاربردهای مشتق

۱۵۷	بخش اول: اکستریم‌های یک تابع
۱۶۷	بخش دوم: تشخیص صعودی و نزولی بودن ...
۱۷۲	بخش سوم: تقعر و عطف
۱۷۸	بخش چهارم: رسم نمودار تابع‌ها
۱۸۴	آزمون جمع‌بندی
۱۸۵	پاسخ سؤال‌های امتحانی

امتحانات

۲۰۶	امتحان شماره (۱): نمونه امتحان نیم‌سال اول
۲۰۷	پاسخ امتحان شماره (۱): نمونه امتحان نیم‌سال اول
۲۰۹	امتحان شماره (۲): نمونه امتحان نیم‌سال اول
۲۱۰	پاسخ امتحان شماره (۲): نمونه امتحان نیم‌سال دوم
۲۱۲	امتحان شماره (۳): نمونه امتحان نیم‌سال دوم
۲۱۳	پاسخ امتحان شماره (۳): نمونه امتحان نیم‌سال دوم
۲۱۴	امتحان شماره (۴): نمونه امتحان نیم‌سال دوم
۲۱۵	پاسخ امتحان شماره (۴): نمونه امتحان نیم‌سال دوم
۲۱۶	امتحان شماره (۵): نهایی خرداد ۱۴۰۲
۲۱۷	پاسخ امتحان شماره (۵): نهایی خرداد ۱۴۰۲
۲۱۸	امتحان شماره (۶): نهایی خرداد ۱۴۰۳
۲۲۰	پاسخ امتحان شماره (۶): نهایی خرداد ۱۴۰۳

فصل اول: تابع

۷	بخش اول: تبدیل نمودار توابع
۱۷	بخش دوم: تابع درجه سوم، توابع یکنوا
۲۳	بخش سوم: بخش‌پذیری و تقسیم
۲۶	آزمون جمع‌بندی
۲۷	پاسخ سؤال‌های امتحانی

فصل دوم: مثلثات

۴۰	بخش اول: تناوب
۴۶	بخش دوم: تانژانت
۴۹	بخش سوم: معادلات مثلثاتی
۵۷	آزمون جمع‌بندی
۵۸	پاسخ سؤال‌های امتحانی

فصل سوم: حدهای نامتناهی و حد در بی‌نهایت

۶۹	بخش اول: حدهای نامتناهی (حد در بی‌نهایت)
۷۶	بخش دوم: حد در بی‌نهایت
۸۲	بخش سوم: مجانب‌ها
۹۱	آزمون جمع‌بندی
۹۳	پاسخ سؤال‌های امتحانی

فصل چهارم: مشتق

۱۰۵	بخش اول: آشنایی با مفهوم مشتق
۱۱۱	بخش دوم: مشتق‌پذیری و پیوستگی
۱۱۸	بخش سوم: تابع مشتق (قسمت اول)
۱۲۵	بخش چهارم: تابع مشتق (قسمت دوم)
۱۳۳	بخش پنجم: آهنگ تغییر متوسط و آهنگ تغییر لحظه‌ای
۱۳۹	آزمون جمع‌بندی
۱۴۰	پاسخ سؤال‌های امتحانی

فصل ۱: تابع

بخش ۱: تبدیل نمودار توابع

رسم خیلی از تابع‌ها آن هم در سطح دبیرستان اصلاً سخت نیست؛ یعنی اگر نمودار یک تابع را داشته باشیم، با یک سری تبدیل‌ها می‌توانیم نمودار تابع‌های زیادی را رسم کنیم.

انتقال‌های عمودی و افقی

پارسال و پیرارسال (دو سال پیش) با یک سری تبدیل آشنا شدید و چون پیش‌نیاز درس‌های جدیدند، بد نیست یادی از آن‌ها کنیم. (البته کتاب دوازدهم هم بهوشون اشاره کرده.)

اگر نمودار تابع $y = f(x)$ را داشته باشیم:

الف) $y = f(x) \pm k$ این نمودارها را به این شکل رسم می‌کنیم: ($k > 0$)

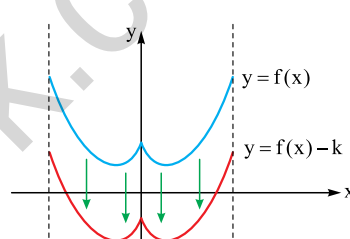
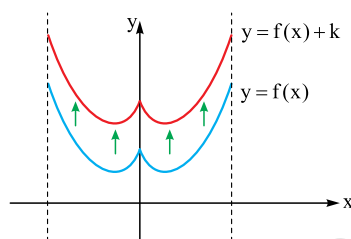
۱ $f(x) + k \Rightarrow$ $f(x)$ را k واحد بالا می‌بریم.

۲ $f(x) - k \Rightarrow$ $f(x)$ را k واحد پایین می‌بریم.

به این انتقال، انتقال عمودی می‌گوییم.

مثلاً $f(x) + 2$ ، دو واحد نسبت به $f(x)$ به بالا می‌رود و $f(x) - 1$ ، یک واحد نسبت به $f(x)$ به پایین می‌رود.

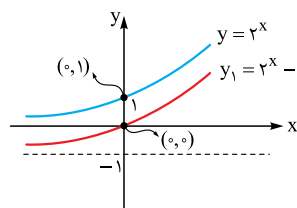
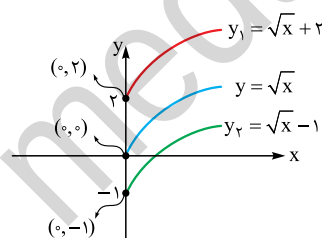
به نمودارهای زیر توجه کنید: ($k > 0$)



دامنه و برد $y = f(x) + k$: همان‌طور که می‌بینید در این انتقال، دامنه تابع تغییری نمی‌کند. (انتقال عمودیه) ولی برد تابع، k واحد جابه‌جا می‌شود.

پس اگر $R_{f(x)} = [a, b]$ (برد f) باشد، آن‌گاه $R_{f(x)+k} = [a+k, b+k]$ است.

چند مثال از انتقال عمودی توابع معروف ببینید:



دامنه و برد تابع $y = \sqrt{x}$ بازه $[0, +\infty)$ است.

دامنه y_1 بازه $[0, +\infty)$ و برد آن بازه $[2, +\infty)$ است.

دامنه y_2 بازه $[0, +\infty)$ و برد آن بازه $[-1, +\infty)$ است.

دامنه $y = 2^x$ و برد آن بازه $(0, +\infty)$ است.

دامنه y_1 و برد آن بازه $(-1, +\infty)$ است.

تذکر: برای این‌که در انتقال، نمودار دقیق‌تری به دست آوریم، مختصات یک یا چند نقطه را در نمودار انتقال یافته مشخص می‌کنیم و سپس نمودار را براساس آن‌ها رسم می‌کنیم.

مثلاً برای رسم نمودار $y_1 = \sqrt{x} + 2$ با استفاده از نمودار $y = \sqrt{x}$ می‌گوییم نقطه $(0, 0)$ روی تابع $y = \sqrt{x}$ قرار دارد و اگر دو واحد به بالا انتقال پیدا کند، x آن عوض نشده و همان صفر است، ولی y آن به اضافه دو خواهد شد و نقطه انتقال یافته $(0, 2)$ خواهد بود.

ب) $y = f(x \pm k)$ این نمودارها را به این شکل رسم می‌کنیم: ($k > 0$)

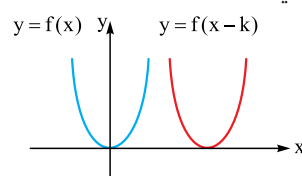
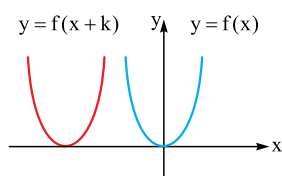
۱ $f(x + k) \Rightarrow$ $f(x)$ را k واحد چپ می‌بریم.

۲ $f(x - k) \Rightarrow$ $f(x)$ را k واحد راست می‌بریم.

به این انتقال، انتقال افقی می‌گوییم.

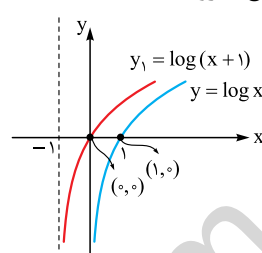
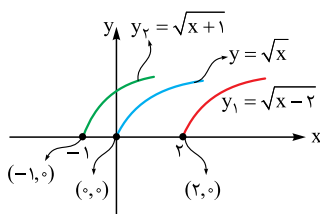
مثلاً $f(x - 2)$ ، دو واحد نسبت به $f(x)$ به راست می‌رود و $f(x + 1)$ ، یک واحد نسبت به $f(x)$ به چپ می‌رود (برعکسه).

به نمودارهای زیر توجه کنید:



دامنه و برد $y = f(x+k)$: همان‌طور که می‌بینید در این انتقال، برد تابع تغییری نمی‌کند (انتقال افقیه دیگه) ولی دامنه تابع، k واحد جابه‌جا می‌شود. پس اگر $D_{f(x)} = [a, b]$ ، آن‌گاه $D_{f(x+k)} = [a-k, b-k]$ است. (پرا این پوری نگاه می‌کنید؟؟؟ گفتیم که برعکسه)

چند مثال از انتقال افقی توابع معروف ببینید:



دامنه و برد $y = \sqrt{x}$ بازه $[0, +\infty)$ است.

دامنه $y = \log x$ بازه $(0, +\infty)$ و برد آن $\mathbb{R}$ است.

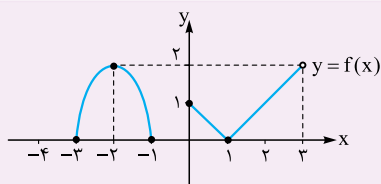
دامنه y_1 بازه $[2, +\infty)$ و برد آن بازه $[0, +\infty)$ است.

دامنه y_1 بازه $(-1, +\infty)$ و برد آن $\mathbb{R}$ است.

دامنه y_2 بازه $[-1, +\infty)$ و برد آن بازه $[0, +\infty)$ است.

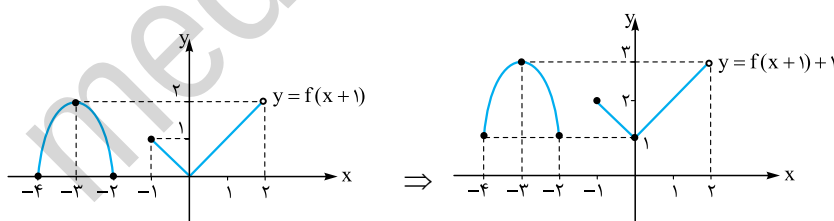
تغییر عمودی $y = f(x + \square) + \Delta \rightarrow$
تغییر افقی

توجه: خیلی وقت‌ها ممکن است در یک تابع، هم تغییرات افقی و هم عمودی داشته باشیم، مثلاً: برای رسم این تابع‌ها از روی $y = f(x)$ اول تغییر افقی ($\square$) و بعد تغییر عمودی (Δ) را اعمال می‌کنیم.



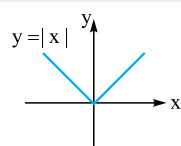
مثال: نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل است. به کمک انتقال، نمودار تابع $y = f(x+1) + 1$ را رسم کنید.

پاسخ: برای رسم $f(x+1)$ نمودار $f(x)$ را یک واحد به چپ می‌بریم، سپس نمودار $f(x+1)$ را یک واحد بالا می‌بریم تا نمودار تابع $y = f(x+1) + 1$ به دست آید. یعنی:

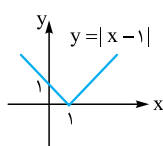


مثال: نمودار تابع $y = |x-1| - 2$ را با استفاده از انتقال رسم کرده و دامنه و برد آن را تعیین کنید.

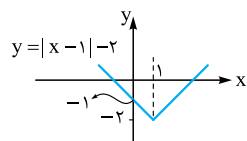
پاسخ: ابتدا نمودار $y = |x|$ را رسم می‌کنیم.



در مرحله بعدی نمودار $y = |x-1|$ را با انتقال افقی یک واحد به سمت راست تابع اصلی ($y = |x|$) رسم می‌کنیم.



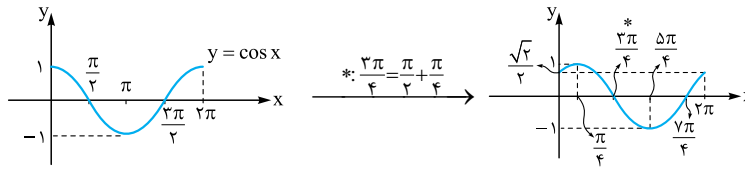
در مرحله آخر، نمودار مرحله قبلی را با انتقال عمودی دو واحد به پایین منتقل کرده و رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار مشخص هست که دامنه نمودار انتقال‌یافته $\mathbb{R}$ و برد آن هم $[-2, +\infty)$ می‌باشد.

مثال: نمودار تابع $y = \cos(x - \frac{\pi}{4})$ را به کمک نمودار $y = \cos x$ در بازه $[0, 2\pi]$ رسم کنید.

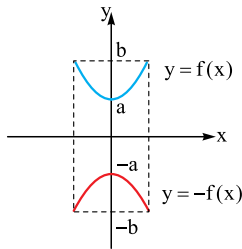
پاسخ: ابتدا نمودار $y = \cos x$ را در بازه $[0, 2\pi]$ رسم می‌کنیم و سپس به اندازه $\frac{\pi}{4}$ به سمت راست انتقال افقی می‌دهیم.



از مطالبی که در سال‌های قبل یاد گرفتید، دو تبدیل بسیار مهم و پرکاربرد $-f(x)$ و $f(-x)$ باقی‌مانده است. این دو را هم بگویم و برویم سراغ تبدیل‌های جدید.

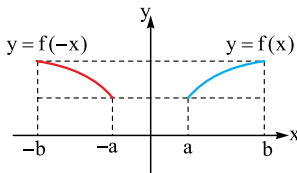
رسم $-f(x)$ و $f(-x)$ از روی $f(x)$

نمودار $y = f(x)$ را داریم:



الف) $y = -f(x)$ برای رسم این تابع از روی $f(x)$ ، نمودار f را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم. واضح است که دامنه f و $-f$ با هم برابرند ولی محدوده $-f$ به صورت زیر تغییر می‌کند. اگر $R_{f(x)} = [a, b]$ ، آن‌گاه $R_{-f(x)} = [-b, -a]$ است. (نمودار رو ببینید.)

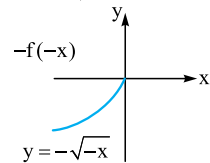
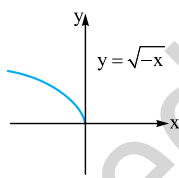
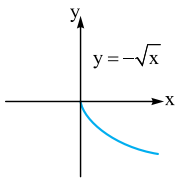
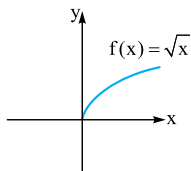
ب) $y = f(-x)$ برای رسم این تابع از روی $f(x)$ ، این بار f را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم. همان‌طور که از روی نمودار می‌بینید برد $f(x)$ و $f(-x)$ با هم برابرند ولی محدوده دامنه به صورت زیر تغییر می‌کند.



اگر $D_{f(x)} = [a, b]$ ، آن‌گاه $D_{f(-x)} = [-b, -a]$ است.

مثال: از روی نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ نمودار تابع‌های $f(-x)$ و $f(-x)$ و $-f(x)$ را رسم کنید.

پاسخ: می‌دانیم که نمودار $\sqrt{x}$ به صورت مقابل است:

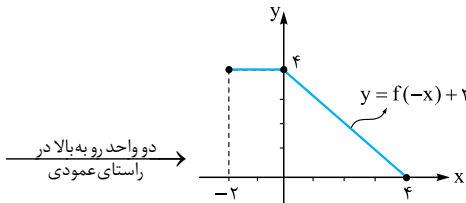
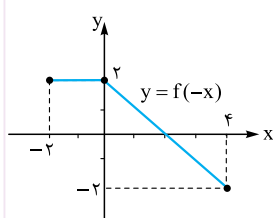
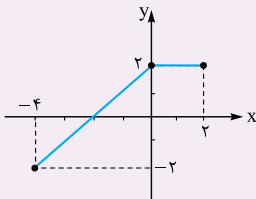


برای رسم $-f(x)$ و $f(-x)$ ، نمودار $f(x)$ را به ترتیب نسبت به محور x ها و محور y ها قرینه می‌کنیم. ببینید:

برای رسم $-f(-x)$ ، نمودار $f(x)$ را ابتدا نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم $(f(-x))$ ، سپس نمودار حاصل را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم $(-f(-x))$:

نکته: برای رسم نمودار $-f(-x)$ از روی نمودار $f(x)$ ، کافی است $f(x)$ را نسبت به مبدأ مختصات قرینه کنیم.

مثال: با توجه به نمودار تابع $y = f(x)$ ، نمودار تابع $y = f(-x) + 2$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را مشخص کنید.



پاسخ: ابتدا نمودار $y = f(-x)$ را رسم می‌کنیم که می‌بایست نمودار اصلی $f(x)$ را نسبت به محور y ها قرینه کنیم. سپس نمودار حاصل را ۲ واحد در راستای عمودی بالا می‌بریم. با توجه به شکل نهایی مشخص است که دامنه برابر با بازه $[-2, 4]$ و برد برابر با بازه $[0, 4]$ می‌باشد.

اگر نمودار $y = f(x)$ را داشته باشیم:

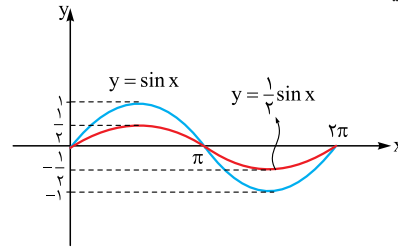
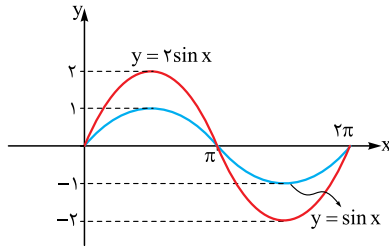
برای رسم این تابع از روی $y = f(x)$ ، عرض تابع f را در k ضرب می‌کنیم (دامنه ثابت) و آن را در دو حالت بررسی می‌کنیم:

$$y = kf(x)$$

۱) $k > 1 \Rightarrow$ نمودار $f(x)$ در راستای محور y با ضریب k کشیده می‌شود (انبساط عمودی)

۲) $0 < k < 1 \Rightarrow$ نمودار $f(x)$ در راستای محور y با ضریب k فشرده می‌شود (انقباض عمودی)

به مثال زیر توجه کنید:



نگاه کنید! $2 \sin x$ نسبت به $\sin x$ کشیده‌تره ولی $\frac{1}{2} \sin x$ نسبت به $\sin x$ فشرده‌تره.

دامنه و برد تابع $y = kf(x)$: همان‌طور که می‌بینید، دامنه تابع $kf(x)$ تغییر نمی‌کند ولی برد تابع، k برابر می‌شود.

پس اگر $R_{f(x)} = [a, b]$ ، آن‌گاه $R_{kf(x)} = [ak, bk]$ است. ($k > 0$)

آقا اجازه! اگر بفهمیم از روی نمودار $f(x)$ ، مثلاً نمودار $-2f(x)$ را رسم کنیم چی؟

خب، اول $2f(x)$ را رسم می‌کنیم (نمودار f کشیده‌تر می‌شود) و سپس نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم یا این‌که مستقیم y ها رو در -2 ضرب می‌کنیم.

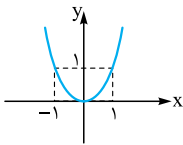
مثال: به کمک نمودار $y = x^2$ ، نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید.

الف) $y = \frac{1}{2}x^2$

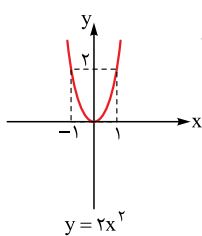
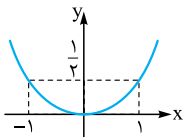
ب) $y = -2x^2$

پاسخ:

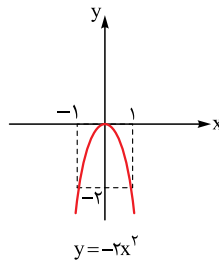
می‌دانیم نمودار $y = x^2$ به صورت مقابل است:



الف) برای رسم $y = \frac{1}{2}x^2$ باید نمودار x^2 ، در راستای محور y ها فشرده‌تر شود (ذهن نمودار بازتر همیشه).



نسبت به محور x ها
قرینه می‌کنیم.



ب) برای رسم $y = -2x^2$ ابتدا $y = 2x^2$ را از روی

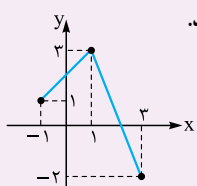
x^2 رسم می‌کنیم و سپس آن را نسبت به محور x ها

قرینه می‌کنیم. ببینید:

نکته: برای رسم نمودارهای $y = af(x) + b$ ، از روی $y = f(x)$ کافی است y های همه نقاط را ابتدا در a ضرب کرده

(یعنی با ضریب a انبساط یا انقباض عمودی ایجاد کنیم)، سپس کل نمودار به دست آمده را b واحد انتقال عمودی بدهیم.

(ترتیبش خیلی مهمه!)



مثال: در شکل مقابل نمودار $f(x)$ رسم شده است، از روی آن نمودارهای زیر را رسم کرده و دامنه و برد آن‌ها را مشخص کنید.

الف) $y = 2f(x) - 1$

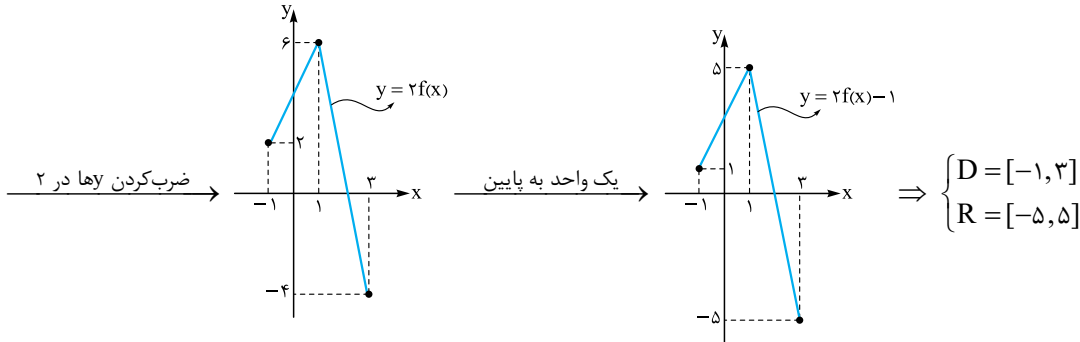
ب) $y = 2 - f(x)$

پ) $y = 1 - \frac{f(x)}{3}$

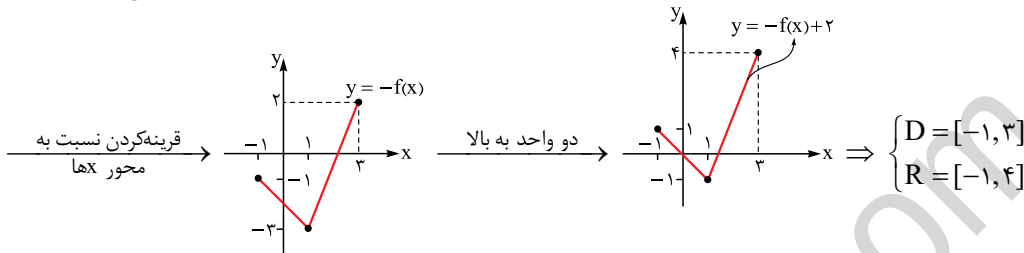


پاسخ: از روی نمودار مشخص است که $D_f = [-1, 3]$ و $R_f = [-2, 3]$

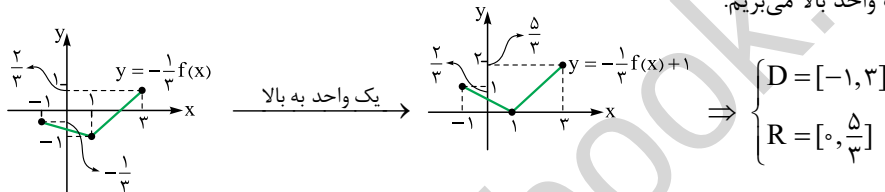
الف) کافی است نمودار را ابتدا با ضریب ۲ انبساط عمودی دهیم و سپس ۱ واحد با انتقال عمودی پایین بیاوریم.



ب) برای رسم $y = -f(x) + 2$ ، ابتدا نمودار را نسبت به محور x ها قرینه کرده و سپس دو واحد در راستای y ها نمودار را بالا می‌بریم.



پ) برای رسم $y = \frac{1}{3}f(x) + 1$ ، ابتدا با ضریب $\frac{1}{3}$ در راستای عمودی منقبض کرده و نسبت به محور x ها قرینه کرده (این دو مرحله را می‌توان یکجا انجام داد با ضرب y ها در $-\frac{1}{3}$) و یک واحد بالا می‌بریم.



انبساط و انقباض افقی

اگر نمودار $y = f(x)$ را داشته باشیم:

برای رسم این تابع از روی $y = f(x)$ ، طول نمودار f را در $\frac{1}{k}$ ضرب می‌کنیم (عرض ثابت) و آن را در دو حالت بررسی می‌کنیم:

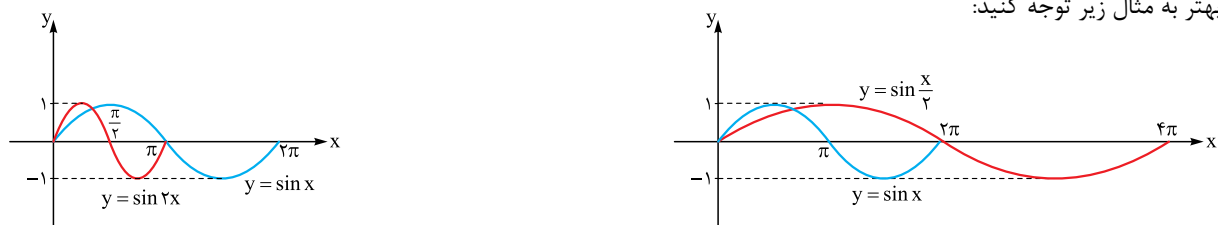
۱) $k > 1 \Rightarrow$ نمودار $f(x)$ در راستای محور x ها با ضریب $\frac{1}{k}$ فشرده می‌شود (انقباض افقی)

۲) $0 < k < 1 \Rightarrow$ نمودار $f(x)$ در راستای محور x ها با ضریب $\frac{1}{k}$ کشیده می‌شود (انبساط افقی)

مثلاً برای رسم نمودار $f(2x)$ از روی $f(x)$ ، تمامی x های تابع $f(x)$ را در $\frac{1}{2}$ ضرب می‌کنیم (یا همان بر ۲ تقسیم می‌کنیم) بدون این که y شان عوض شود. مثلاً نقطه $A(4, -1)$ و $B(-3, 0)$ در $f(x)$ ، به نقاط $A'(\frac{4}{2}, -1)$ و $B'(-\frac{3}{2}, 0)$ در $f(2x)$ تبدیل می‌شوند.

تذکره: توجه کنید که وقتی تغییرات روی x است $f(x+k)$ یا $f(kx)$ برعکس عمل می‌کنیم. مثلاً در $f(x+1)$ ، تابع $f(x)$ را یک واحد به چپ می‌بریم (انتقال افقی) و در $f(2x)$ ، تابع $f(x)$ را با ضریب $\frac{1}{2}$ در راستای محور x ها فشرده می‌کنیم (انقباض افقی).

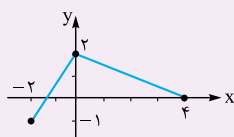
برای فهم بهتر به مثال زیر توجه کنید:



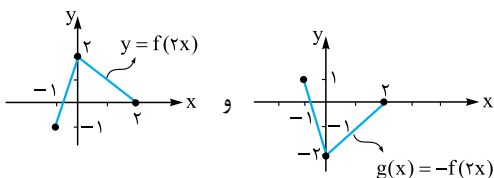
مشاهده می‌کنید نمودار $y = \sin \frac{x}{2}$ ($k = \frac{1}{2}$) از همه کشیده‌تر و نمودار $y = \sin 2x$ ($k = 2$) از همه فشرده‌تر است. (گفتیم که تغییر روی x برعکس)

دامنه و برد تابع $y = f(kx)$: همان طور که می‌بینید برد تابع $f(kx)$ تغییری نمی‌کند ولی دامنه تابع $f(kx)$ تغییر می‌کند. (فعلاً k را مثبت می‌گیریم).

پس اگر $D_{f(x)} = [a, b]$ ، $D_{f(kx)} = [\frac{a}{k}, \frac{b}{k}]$ می‌شود. pdf ماجرای بیست حسابان دوازدهم ریاضی خیلی سبز + ضمیمه رایگان pdf



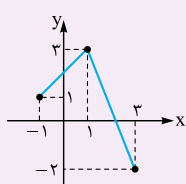
مثال: نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $g(x) = -f(2x)$ را رسم کنید. سپس دامنه و برد تابع g را تعیین کنید.



پاسخ: ابتدا نمودار $f(2x)$ را با نصف کردن x های نمودار رسم می‌کنیم. سپس برای رسم $-f(2x)$ ، نمودار را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم. با توجه به نمودار مشخص است که: $D_g = [-1, 1]$ و $R_g = [-2, 2]$ می‌باشد.

بچه‌ها یک سؤال! اگر بفاهیم از روی نمودار $f(x)$ ، مثلاً $f(-2x)$ را رسم کنیم چي؟؟؟ بگذارید فوادم جواب بدهم. مثل حالت‌های قبل، ابتدا $f(2x)$ را رسم می‌کنیم و سپس $f(2x)$ را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم یا این که x ها رو مستقیم به -2 تقسیم می‌کنیم.

نکته: برای رسم $f(ax + b)$ از روی $f(x)$ ، ابتدا b واحد انتقال افقی می‌دهیم و سپس با ضرب $\frac{1}{a}$ انقباض یا انبساط افقی می‌دهیم. (ترتیبش خیلی مهمه!)



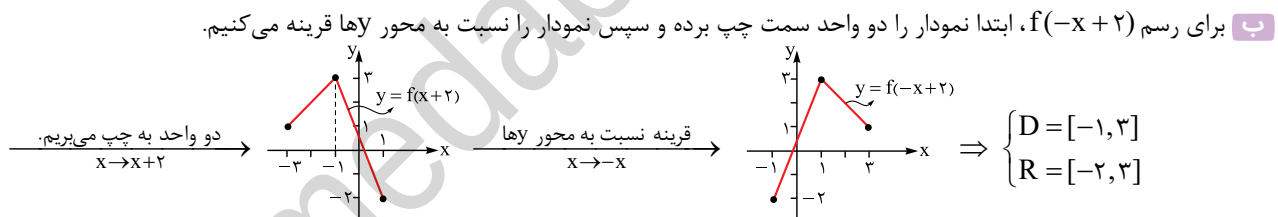
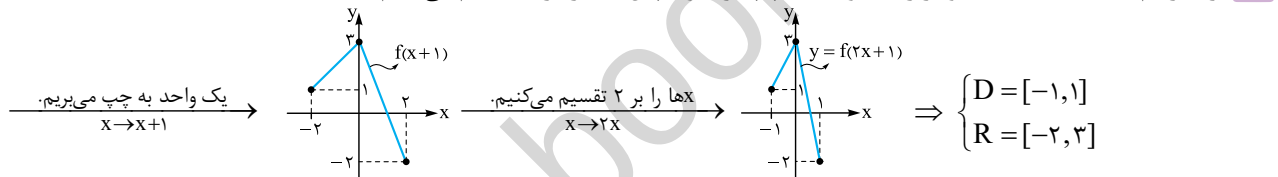
مثال: در شکل مقابل نمودار $f(x)$ رسم شده است، از روی آن نمودارهای زیر را رسم کرده و دامنه و برد آن‌ها را مشخص کنید.

الف) $y = f(2x + 1)$

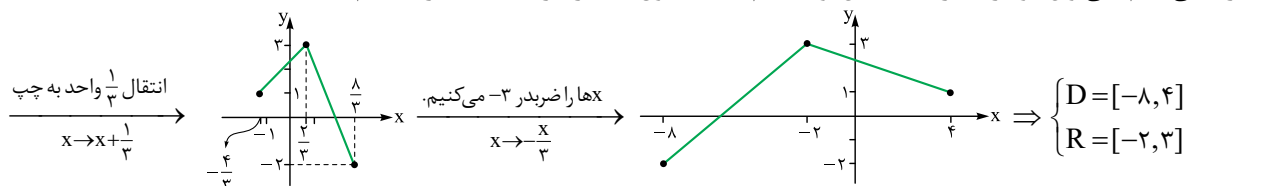
ب) $y = f(2 - x)$

پ) $y = f\left(\frac{1-x}{3}\right)$

پاسخ: از روی نمودار مشخص است که $D_f = [-2, 2]$ و $R_f = [-2, 2]$



پ) برای رسم $f\left(\frac{-x+1}{3}\right) = f\left(\frac{-x}{3} + \frac{1}{3}\right)$ ، ابتدا نمودار را به اندازه $\frac{1}{3}$ سمت چپ انتقال داده، سپس قرینه نسبت به محور y ها و بعد x ها را در 3 ضرب می‌کنیم (می‌توان دو مرحله را یکجا این‌گونه انجام داد که طول نقاط را در عدد 3 ضرب کنیم).



نکته: الف) اگر دامنه $f(x)$ برابر $[m, n]$ باشد و دامنه $f(ax + b)$ خواسته شود، کافی است نامعادله زیر حل شود تا دامنه $f(ax + b)$ به دست آید:

$$m \leq ax + b \leq n \xrightarrow[a > 0]{\text{تنها کردن } x} \frac{m-b}{a} \leq x \leq \frac{n-b}{a}$$

ب) اگر دامنه $f(ax + b)$ برابر $[m, n]$ باشد و دامنه $f(x)$ خواسته شود، کافی است مراحل زیر طی شود:

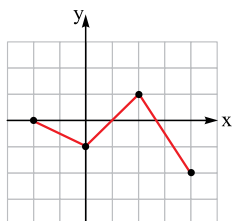
$$m \leq x \leq n \xrightarrow[a > 0]{\text{ساختن } ax+b} ma + b \leq ax + b \leq na + b$$

مثال: اگر دامنه $f(x)$ برابر $[-7, 8]$ باشد، دامنه تابع $f(3x - 1)$ را بیابید.

پاسخ: از نکته الف) گفته شده در بالا استفاده می‌کنیم. $D_{f(3x-1)} = [-2, 3]$

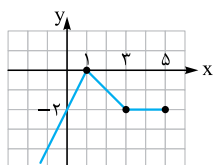
۳۳- نمودار تابع $f(x)$ به صورت روبه‌رو است. نمودار تابع $g(x) = -3f(\frac{x}{3}) + 2$ را رسم کرده و سپس برد تابع $g(x)$ را تعیین کنید.

(نمایی دی ۱۴۰۲)



۳۴- نمودار تابع $f(x)$ در زیر رسم شده است. نمودار تابع $y = -f(2x - 1)$ را رسم کرده، سپس دامنه و برد تابع حاصل را به دست آورید.

(مشابه نمایی دی ۹۹ و نمایی فردارد ۱۴۰۳)

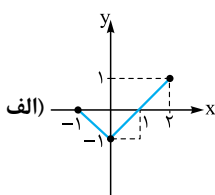
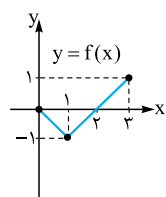


(نمایی شهریور ۹۹)

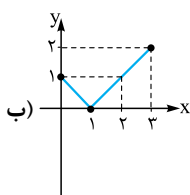
$$y = \cos 2x - 1$$

۳۵- نمودار تابع زیر را به کمک نمودار تابع $y = \cos x$ رسم کنید.

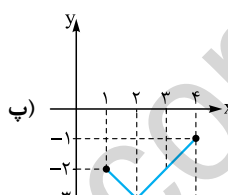
۳۶- با توجه به نمودار تابع $y = f(x)$ ، هر یک از نمودارهای زیر مربوط به کدام یک از ضابطه‌های داده شده می‌باشد؟



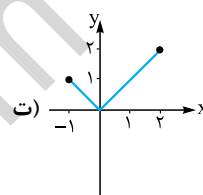
$$f(x-1) - 2 \quad (a)$$



$$f(x+1) \quad (b)$$



$$f(x+1) + 1 \quad (c)$$



$$f(x) + 1 \quad (d)$$

۳۷- به کمک نمودار تابع f ، نمودار سایر تابع‌های خواسته شده را رسم کنید.

$$(a) -f(x)$$

$$(b) f(-x)$$

$$(c) -2f(-x)$$

$$(d) 2f(-\frac{1}{2}x)$$

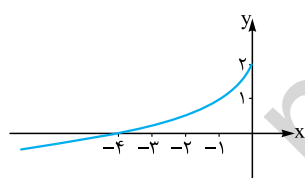
۳۸- با توجه به نمودار g ، نمودار تابع‌های خواسته شده را رسم کنید.

$$(a) g(2x-1)$$

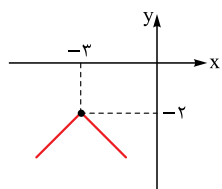
$$(b) g(-x+1)$$

$$(c) 2g(3-x)$$

۳۹- نمودار تابع مقابل، با استفاده از تبدیل نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ به دست آمده است. ضابطه این تابع را به دست آورید.



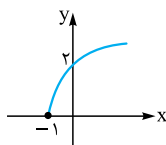
۴۰- نمودار روبه‌رو از قرینه‌یابی و انتقال نمودار $y = |x|$ به دست آمده است، ضابطه آن را مشخص کنید.



۴۱- نقطه $A(1, -4)$ روی نمودار تابع $y = 3 - f(x)$ قرار دارد. مختصات نقطه نظیر A را روی نمودار تابع $y = \frac{1}{3}f(x-2)$ بیابید.

۴۲- اگر تابع $y = x^2 + 1$ را با ضریب $\frac{1}{3}$ در جهت افقی منقبض کرده و ۳ واحد به سمت چپ منتقل کنیم و تابع حاصل را با ضریب $\frac{1}{3}$ در جهت عمودی منقبض کرده و ۳ واحد به پایین منتقل کنیم، ضابطه تابع حاصل را در هر مرحله بنویسید.

۴۳- اگر نمودار $y = \sqrt{ax+b}$ مطابق شکل روبه‌رو باشد، نمودار $y = \sqrt{-bx+2a}$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را مشخص کنید.

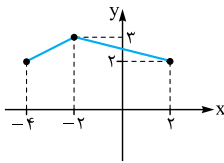


۴۴- اگر دامنه تابع $y = 2f(\frac{x-1}{3}) - 5$ برابر $[-2, 7]$ باشد، دامنه تابع $y = -f(2-x) - 1$ چه بازه‌ای است؟

۴۵- اگر برد تابع $y = 2f(\frac{x-1}{3}) - 5$ برابر $[-2, 3]$ باشد، برد تابع $y = -f(2-x) - 1$ چه بازه‌ای است؟

۴۶- تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & -1 \leq x < 1 \\ \sqrt{x-1} & 1 \leq x < 5 \end{cases}$ را در نظر بگیرید. الف) نمودار آن را رسم کرده و دامنه و برد آن را بیابید.

ب) نمودار $y = f(2-x) - 1$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را مشخص کنید.



۴۷- اگر نمودار $y = \frac{1}{3}f(x+2) + 2$ مطابق شکل روبه‌رو باشد، نمودار $y = f(x)$ را

رسم کرده و برد آن را مشخص کنید.

۴۸- مراحل رسم نمودار $y = 2x^2 - 4x + 1$ از روی نمودار $y = x^2$ را بیان کنید.

۴۹- نمودار $y = \frac{3x-4}{x-1}$ را با استفاده از نمودار $y = \frac{1}{x}$ رسم کرده و مراحلش را بنویسید.

۵۰- اگر نقطه $(2, -1)$ روی تابع $y = -f(1-2x) + 3$ باشد، متناظر آن نقطه بر روی تابع $y = 2f(\frac{x+1}{3}) - 1$ چه نقطه‌ای است؟

۵۱- اگر نمودار $y = x^2 + 2x - 2$ را k واحد به راست انتقال داده و آن را نسبت به محور x ها قرینه کنیم، عرض از مبدأ نمودار حاصل برابر -1 خواهد بود، مقدار k را بیابید. ($k > 0$)

۵۲- نمودارهای $y = \sin 2x$ و $y = \sin \frac{x}{3}$ در بازه $(0, 2\pi)$ چند نقطه برخورد دارند؟

بخش ۲: تابع درجه سوم، توابع یکنوا

در این درس ابتدا مفهوم چندجمله‌ای را می‌گوییم و بعد از آن سراغ یکنوایی می‌رویم. بخش زیادی از یکنوایی مجدداً در فصل ۵ (کاربرد مشتق) تدریس می‌شود که این نشان از اهمیت بالای این مفهوم است.

تابع چندجمله‌ای از درجه n

هر تابع به صورت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ که در آن n یک عدد صحیح نامنفی است و اعداد $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ حقیقی‌اند ($a_n \neq 0$) را یک تابع چندجمله‌ای از درجه n می‌نامیم. (منظور از درجه، همون بزرگترین توان x است.)

توجه: در تابع‌های چندجمله‌ای رادیکال، قدرمطلق، جزء صحیح، عامل مثلثاتی، لگاریتم و ... وجود ندارد. برای مثال:

❶ $f(x) = x^2 + 6x$ یک چندجمله‌ای از درجه ۲ است. ❷ $f(x) = (x-1)^3 + x + 2$ یک چندجمله‌ای از درجه ۳ است.

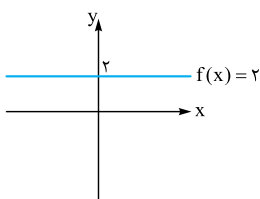
❸ $f(x) = (x-1)^3 x + 2$ یک چندجمله‌ای از درجه ۴ است. (توان‌ها جمع می‌شن!!)

❹ $f(x) = 2$ یک چندجمله‌ای از درجه صفر است. (۲ همون $2x^0$ است.)

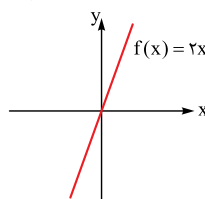
تذکر: مطابق پاورقی کتاب درسی، برای $f(x) = 0$ درجه تعریف نمی‌شود.

❶ $f(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = |x|$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = 2^x$ و ... چندجمله‌ای نیستند.

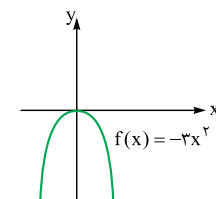
در حالت کلی می‌دانیم که تابع ثابت $f(x) = c$ یک چندجمله‌ای از درجه صفر، تابع خطی $f(x) = ax + b$ ($a \neq 0$) یک چندجمله‌ای از درجه یک و $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) یک چندجمله‌ای از درجه ۲ است. نمودارها را هم ببینید:



تابع درجه صفر



تابع درجه ۱ (خطی)



تابع درجه ۲ (سه‌می)

تابع درجه ۳

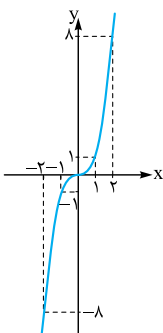
(به قول قدیمی‌ها، تا ۳ نشه بازی نشه.)

پس الان معروف‌ترین تابع درجه ۳، یعنی $f(x) = x^3$ را خدمتون معرفی می‌کنیم.

با نقطه‌دادن به این تابع می‌بینید که نمودار آن به صورت مقابل است. (شبه لُر هستش.)

دقت کنید که دامنه و برد این تابع $\mathbb{R}$ است.

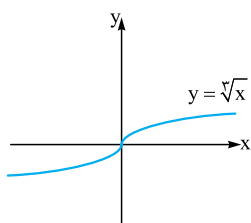
فَب! همان‌طور که می‌بینید تابع $f(x) = x^3$ یک‌به‌یک است (هر قط موازی محور x ها باید نمودارش رو حداقل تو یه نقطه قطع کنه که می‌کنه).



چون یک به یک است وارون پذیر هم است. وارون $f(x) = x^3$ به صورت زیر به دست می آید:

$$y = x^3 \xrightarrow[\text{به دست می آوریم}]{\text{x را بر حسب y}} x = \sqrt[3]{y} \xrightarrow[\text{عوض می کنیم}]{\text{جای x و y را}} f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$$

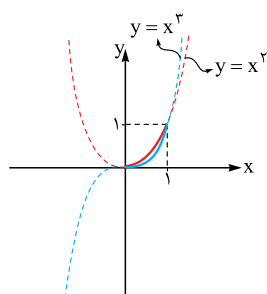
و نمودارش هم با نقطه دادن به صورت مقابل است:



نمودار تابع $y = x^3$ و $y = \sqrt[3]{x}$ (مفصلاً x^3) را حفظ کنید چون در آینده با این دو تابع خیلی سر و کار خواهیم داشت.

مثال: نمودار تابع های $y = x^2$ و $y = x^3$ را در بازه $[0, 1]$ رسم کنید و بگویید کدام تابع بالاتر است؟ برای $x > 1$ چی؟

پاسخ: برای مقایسه دقیق، هر دو تابع را در بازه $[0, 1]$ در یک دستگاه مختصات رسم می کنیم:



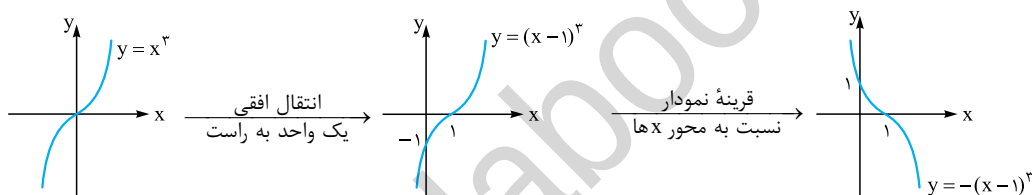
همان طور که می بینید در بازه $(0, 1)$ تابع x^2 بالاتر از x^3 قرار می گیرد (این پوری هم میشه بگیریم که عدد بین صفر و یک، هر چی توانش بزرگ تر میشه، فودش کوچک تر میشه) اما وقتی $x > 1$ است، تابع x^3 بالاتر از x^2 قرار می گیرد (نمودار رو ببینید). دقت کنید که در $x = 0$ و $x = 1$ دو تابع با هم برابر هستند.

(راستی تو بازه $(-\infty, 0)$ هم تابع x^2 بالاتر از تابع x^3 قرار می گیره.)

مثال: نمودار توابع $y = -(x-1)^3$ (الف و $y = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$ (ب)، را به کمک نمودار تابع $y = x^3$ رسم کنید.

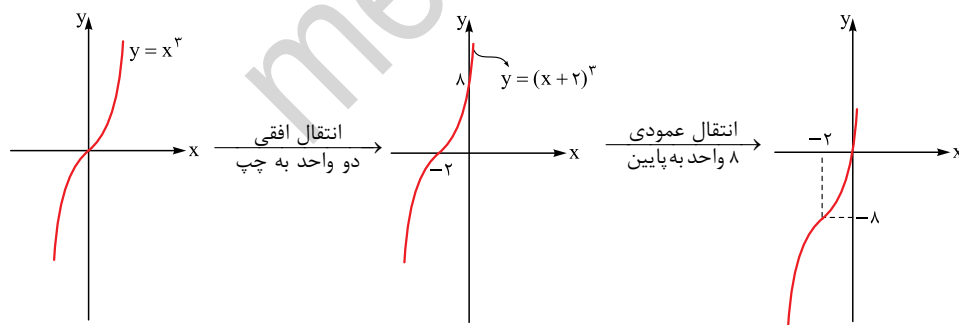
پاسخ:

الف $y = -(x-1)^3$



ب برای این که این تابع را بتوانیم رسم کنیم، ابتدا با اضافه و کم کردن ۸ و با استفاده از اتحاد مکعب دو جمله ای آن را به فرم مطلوب تبدیل می کنیم.

$$y = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - 8 = (x+2)^3 - 8$$



تابع های یکنوا و اکیداً یکنوا

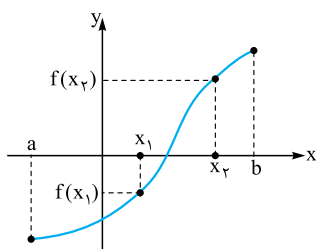
تابع اکیداً صعودی

تابع $y = f(x)$ را در بازه $[a, b]$ اکیداً صعودی می نامیم، هرگاه برای هر ۲ عضو از این بازه مانند x_1

$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

و x_2 داشته باشیم:

به بیانی دیگر با حرکت روی نمودار از چپ به راست، مقدار تابع مدام زیاد می شود. (هیچ فای کمی و حتی ثابت نمیشه.)



تابع اکیداً نزولی

مشابه بالا است با این تفاوت که در آن داریم:

$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

در واقع با حرکت روی نمودار از چپ به راست، مقدار تابع مدام کم می‌شود. (هیچ بایی زیاده‌ای ثابت نمی‌شود.)

توجه: تابعی که اکیداً صعودی و یا اکیداً نزولی باشد را اکیداً یکنوا می‌نامیم.

تابع صعودی

تابع $y = f(x)$ را در بازه $[a, b]$ صعودی می‌نامیم، هرگاه برای هر 2 عضو از این بازه مانند x_1 و x_2

$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$$

داشته باشیم:

به بیانی دیگر با حرکت روی نمودار از چپ به راست، مقدار تابع یا ثابت می‌ماند و یا زیاد می‌شود. (اکیداً صعودی فقط باید زیاد شود.)

تابع نزولی

مشابه بالا است با این تفاوت که:

$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$$

یعنی با حرکت روی نمودار از چپ به راست مقدار تابع، یا ثابت می‌ماند و یا کم می‌شود. (اکیداً نزولی فقط کم می‌شود.)

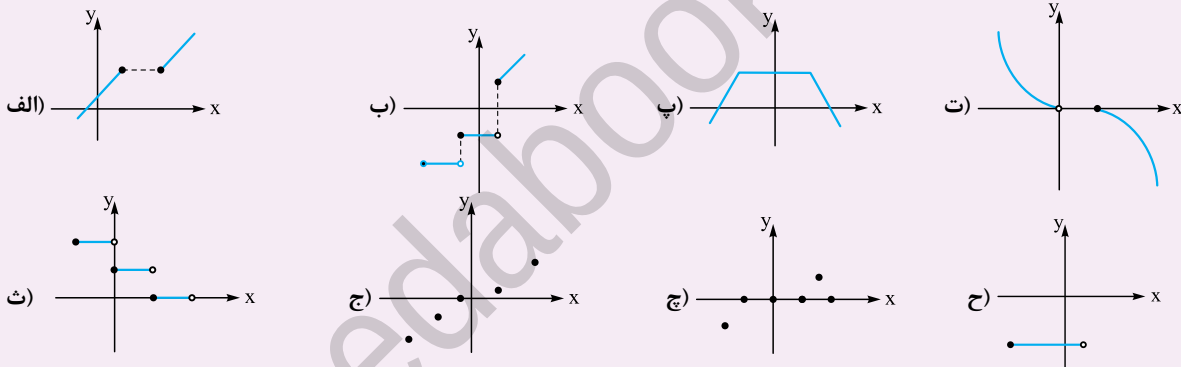
توجه:

۱) تابعی که صعودی و یا نزولی باشد را تابع یکنوا می‌نامیم.

۲) تابع ثابت، تنها تابعی است که هم صعودی است و هم نزولی.

۳) تابعی که در کل دامنه‌اش نه صعودی و نه نزولی باشد را غیر یکنوا می‌نامیم.

مثال: وضعیت یکنوایی توابع زیر را مشخص کنید.



پاسخ: الف) صعودی است و یکنوا می‌باشد.

پ) غیر یکنوا است.

ث) نزولی است و یکنوا می‌باشد.

ج) غیر یکنوا است.

ب) صعودی است و یکنوا می‌باشد.

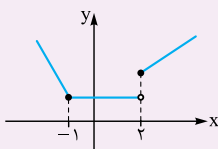
ت) اکیداً نزولی است و اکیداً یکنوا می‌باشد.

ج) اکیداً صعودی است و اکیداً یکنوا می‌باشد.

ح) هم صعودی است و هم نزولی است.

مثال: در شکل مقابل، بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع در آن صعودی، نزولی، اکیداً صعودی و یکنوا

است را مشخص کنید.



پاسخ: مطابق شکل، تابع در بازه $(-\infty, -1]$ در حال پایین آمدن است، پس بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع در آن اکیداً نزولی است، $(-\infty, -1]$ می‌باشد. (در این بازه اکیداً یکنواست.)

تابع در بازه $(-\infty, 2)$ پایین آمده، سپس ثابت می‌ماند، پس بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع در آن نزولی است، $(-\infty, 2)$ می‌باشد. (در این بازه یکنواست.)

تابع در بازه $[-1, 2]$ ثابت است، پس در آن هم صعودی است و هم نزولی. (در این بازه یکنواست.)

تابع در بازه $[-1, +\infty)$ ثابت مانده، سپس بالا می‌رود، پس بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع در آن صعودی است، $[-1, +\infty)$ می‌باشد. (در این بازه یکنواست.)

تابع در بازه $[2, +\infty)$ در حال بالا رفتن است، پس بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع در آن اکیداً صعودی است، $[2, +\infty)$ می‌باشد. (در این بازه اکیداً یکنواست.)

تابع در دامنه‌اش (کلاً) غیر یکنواست.

ردیف	آزمون جمع بندی فصل ۱	رشته ریاضی و فیزیک	مدت امتحان: ۹۰ دقیقه	Kheilisabz.com	نمره
۱	درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را تعیین کنید. الف) نمودار $y = (x-1)^3 + 1$ فقط از دو ناحیه عبور می کند. ب) برای رسم $f(2x+1)$ از روی $f(x)$ ، ابتدا نمودار را با ضریب $\frac{1}{2}$ در راستای افق منقبض کرده و سپس یک واحد به چپ منتقل می کنیم. پ) اگر تابع $y = f(x)$ اکیداً نزولی باشد، تابع $y = -f(x)$ اکیداً صعودی خواهد بود. ت) تابع $y = -\sqrt[3]{x}$ ، اکیداً صعودی است.				۱
۲	جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید. الف) اگر $(\frac{1}{\sqrt[3]{7}})^{2x+1} \leq (\frac{1}{\sqrt[3]{3}})^x$ باشد، حدود x است. ب) $x^5 + 32a^5 = (x + \dots)(x^4 - 2ax^3 + \dots - 8a^3x + 16a^4)$				۱
۳	تابع $f(x) = \begin{cases} -x^3 & -1 < x < 1 \\ x & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ را در نظر بگیرید: الف) نمودار تابع $f(x)$ را رسم کنید سپس دامنه و برد آن را مشخص کنید. ب) دامنه و برد تابع $y = 2f(-x-1) - 1$ را به کمک نمودارش پیدا کنید.				۲
۴	اگر نقطه $A(-2, 1)$ روی تابع $f(x)$ باشد، مختصات نقطه A را روی تابع $y = \frac{-1}{3}f(x-2)$ به دست آورید.				۱
۵	نمودار تابع $y = -f(-2x) + 1$ به صورت مقابل است. نمودار تابع $f(x)$ را رسم کنید سپس دامنه و برد آن را بیابید.				۲
۶	اگر دامنه تابع $f(x)$ برابر $[-1, 4]$ و برد آن $[2, 5]$ باشد، دامنه و برد دو تابع $y = 3f(x+1)$ و $y = 2 - f(2x-1)$ را به دست آورید.				۲
۷	به کمک نمودار تابع $y = \sin x$ با دامنه $[0, 2\pi]$ ، نمودار تابع $y = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$ را رسم کنید و در آخر دامنه و برد آن را پیدا کنید.				۲
۸	تابع $f = \{(3, 2), (1, 0), (-1, 0), (-2, -1)\}$ صعودی است یا نزولی؟ چرا؟				۰/۷۵
۹	نمودار تابع $y = x-1 + x+2 $ را در بازه $[-4, 3]$ رسم کنید و وضعیت یکنوایی آن را در بازه های مختلف بررسی کنید.				۲
۱۰	برای هر یک از موارد خواسته شده، تابع های f و g را به گونه ای مثال بزنید که در آن شرایط صدق کند.	الف) $\begin{cases} f & \text{صعودی} \\ g & \text{نزولی} \\ f+g & \text{صعودی} \end{cases}$	ب) $\begin{cases} f & \text{صعودی} \\ g & \text{صعودی} \\ f-g & \text{هم صعودی و هم نزولی} \end{cases}$	پ) $\begin{cases} f & \text{نزولی} \\ g & \text{نزولی} \\ f-g & \text{اکیداً صعودی} \end{cases}$	۲/۲۵
۱۱	اگر چندجمله ای $f(x) = x(x^2 + ax) + 4(bx + 2)$ بر $(x+2)$ بخش پذیر بوده و باقی مانده تقسیم آن بر $x+1$ برابر ۱ باشد، نمودار $f(x)$ را رسم کرده و مشخص کنید در چه بازه ای یکنوا است.				۲
۱۲	ساده شده $A = \frac{1+x+x^2+x^3+x^4}{2}$ به ازای $x = \sqrt[5]{3}$ چند برابر $\frac{2}{1-\sqrt[5]{3}}$ است؟				۲
۲۰	جمع نمرات				

۲۱. $(-\infty, -1]$

$$\sqrt{x} \Rightarrow -2\sqrt{x} \Rightarrow -2\sqrt{x} - 1$$

$$R=[0, +\infty) \quad R=(-\infty, 0] \quad R=(-\infty, -1]=(-\infty, -1]$$

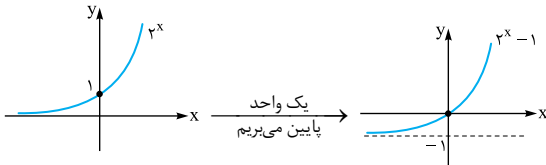
۲۲. نقطه (x_0, y_0) روی $f(x)$ قرار دارد، یعنی $f(x_0) = y_0$.

در تابع $g(x) = f(2x+1)$ برای به دست آوردن متناظر نقطه‌ای که عرضش برابر y_0 باشد، داریم:

$$f(x_0) = y_0 \Rightarrow 2x+1 = x_0 \Rightarrow x = \frac{x_0-1}{2}$$

$$\Rightarrow (\frac{x_0-1}{2}, y_0) \in g(x)$$

۲۳. اول و سوم؛ نمودار $y = 2^x$ را یک واحد پایین می‌بریم.



۲۴. $0 < k < 1$ ؛ مطابق شکل انبساط افقی داریم؛ پس $0 < k < 1$.

$$\sqrt{x} \xrightarrow{x \rightarrow x-3} \sqrt{x-3}$$

$$\xrightarrow{\text{سه واحد سمت راست می‌بریم}} \sqrt{x-3}$$

$$f(x) \Rightarrow f(3x-1) \Rightarrow -2f(3x-1)$$

$$R=(-2, 1] \quad R=(-2, 1] \quad R=[-2, 6)$$

$$\Rightarrow -2f(3x-1) + 3$$

$$R=[1, 9)$$

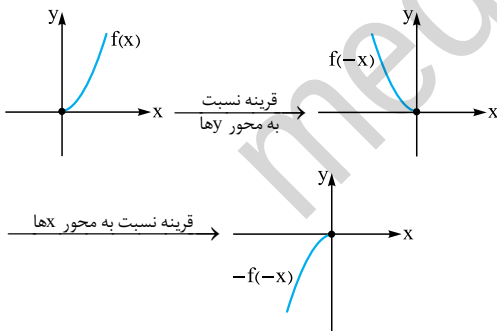
۲۶. $[1, 9)$

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 2x} f(2x)$$

$$\xrightarrow{\text{انتقال ۳ واحد به راست}} f(2(x-3)) = f(2x-6)$$

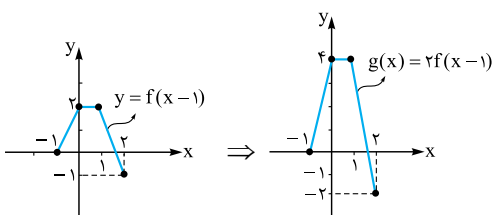
۲۷. $f(2x-6)$

۲۸. $-f(-x)$



۲۹. ابتدا نمودار $f(x-1)$ را با انتقال افقی $f(x)$ ، یک واحد به راست می‌بریم.

در مرحله بعد عرض‌های نقاط را دو برابر کرده و نمودار $g(x) = 2f(x-1)$ را رسم می‌کنیم.



$$D_g = [-1, 2] \text{ و } R_g = [-2, 4]$$

پاسخ سؤال‌های امتحانی

۱. انقباض افقی

$$f(x) \Rightarrow f(x+1) \Rightarrow f(3x+1) \quad [-1, 0] \quad [-2, 1] \quad [-2, 1] \Rightarrow [-2, 0]$$

$$\sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x-2} \Rightarrow 2 + \sqrt{x-2} \quad [2, 4]$$

$$R = [0, 2] \quad R = [0, 2] \quad R = [0 + 2, 2 + 2] = [2, 4]$$

۴. انقباض عمودی - y

$$[-1, \frac{1}{2}], [-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$$

$$f(x) \Rightarrow f(2x) \Rightarrow \frac{1}{2}f(2x) \quad D=[-1, 3] \quad D=[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}] \quad D=[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}] \quad R=[-2, 1] \quad R=[-2, 1] \quad R=[-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}] = [-1, \frac{1}{3}]$$

$$f(x) \rightarrow f(kx) \rightarrow kf(kx) \quad (\alpha, \beta) \quad (\frac{\alpha}{k}, \beta) \quad (\frac{\alpha}{k}, k\beta) \quad A'(\frac{\alpha}{k}, k\beta)$$

۷. نقطه $(5, 0)$ ؛ در تابع $g(x) = -f(2x+1) - 1$ صدق می‌کند؛ یعنی $g(2) = -1$.

$$g(2) = -1 \Rightarrow g(2) = -f(2 \times 2 + 1) - 1 = -1 \Rightarrow -f(5) = 0 \Rightarrow f(5) = 0 \Rightarrow (5, 0) \in f(x)$$

۸. $[-7, 5]$

$$-4 \leq x \leq 2 \xrightarrow{\text{تولید کردن } 2x+1 \text{ و } x2} -8 \leq 2x \leq 4 \xrightarrow{+1} -7 \leq 2x+1 \leq 5 \Rightarrow D_{f(x)} = [-7, 5]$$

۹. نادرست؛ چون نقطه $(-8, 6)$ روی $f(x)$ با نقطه $(-8, 3) = (-8, \frac{6}{2})$ روی $y = \frac{1}{2}f(x)$ متناظر است.

۱۰. نادرست؛ چون اگر برد تابع $y = kf(x)$ ، $[ka, kb]$ باشد، برد تابع $y = f(x)$ ، $[a, b]$ خواهد بود.

۱۱. درست؛ چون در تابع $y = kf(x)$ ، فقط برد k برابر می‌شود و دامنه تغییری ندارد.

۱۲. نادرست؛ چون از انبساط عمودی نمودار $y = f(x)$ به دست می‌آید.

$$-2 \leq x \leq 1 \xrightarrow{\text{تولید کردن } 3x+1 \text{ و } x3} -6 \leq 3x \leq 3 \xrightarrow{+1} -5 \leq 3x+1 \leq 4 \Rightarrow D_{f(x)} = [-5, 4]$$

۱۴. نادرست؛ نمودار $y = f(-x)$ قرینه $y = f(x)$ نسبت به محور y هاست.

۱۵. نادرست؛ نمودار $y = f(\frac{x}{3})$ از انبساط افقی با ضریب ۳ تابع $y = f(x)$ به دست می‌آید.

۱۶. محور xها

۱۷. ۳ واحد در راستای افقی به سمت چپ

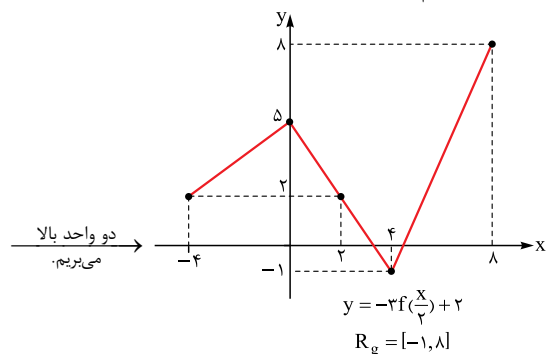
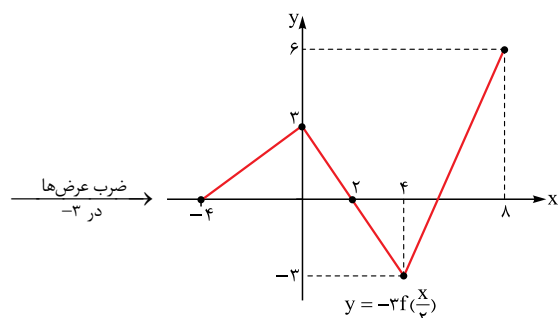
$$f(x) \Rightarrow f(\frac{x}{3}) \quad [-9, 12]$$

$$D=[-3, 4] \quad D=[-3(3), 4(3)]=[-9, 12]$$

۱۹. در k ضرب می‌کنیم.

$$f(x) \Rightarrow f(2x) \Rightarrow -f(2x) \quad (-2, 4) \quad (-\frac{2}{2}, \frac{4}{2}) \quad (-1, 4(-1))=(-1, -4)$$

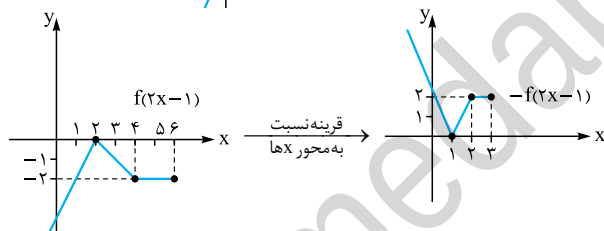
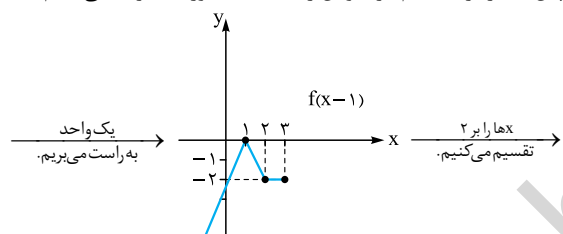
۲۰. $(-1, -4)$



۳۴. برای رسم تابع $y = -f(2x-1)$ ، ابتدا نمودار $f(x)$ را یک واحد به راست

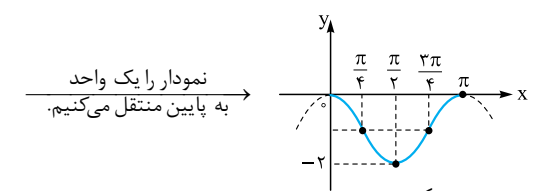
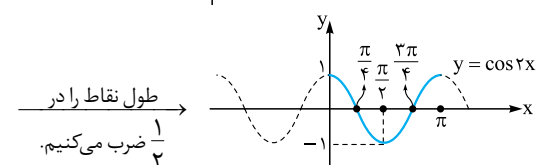
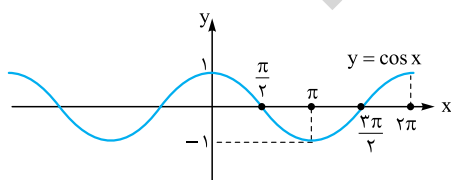
↓ ↓ ↓
۳ ۲ ۱

برده، سپس x ها را بر ۲ تقسیم کرده و آن را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.

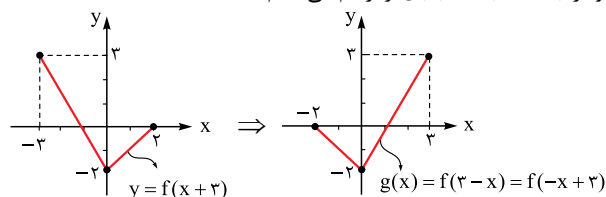


با توجه به شکل دامنه تابع برابر بازه $(-\infty, 3]$ و برد آن بازه $[0, +\infty)$ است.

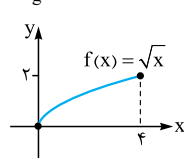
۳۵. مرحله به مرحله رسم نمودار را انجام می‌دهیم:



۳۰. ابتدا نمودار $f(x+3)$ را با انتقال افقی $f(x)$ ، سه واحد به چپ می‌بریم، در مرحله بعد نمودار حاصل را نسبت به محور y ها قرینه کرده و نمودار $g(x) = f(-x+3) = f(3-x)$ را رسم می‌کنیم:



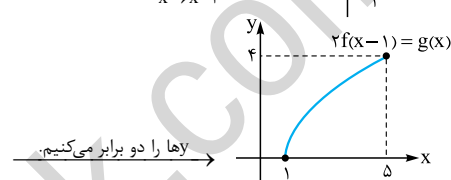
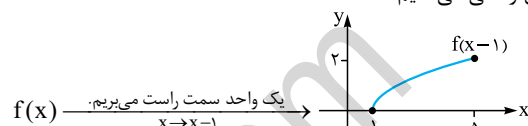
$$D_g = [-2, 3]$$



۳۱ الف نمودار $\sqrt{x}$ را در بازه $[0, 4]$

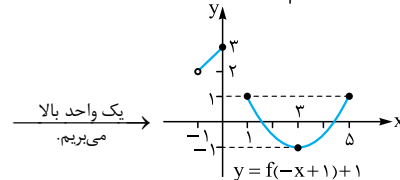
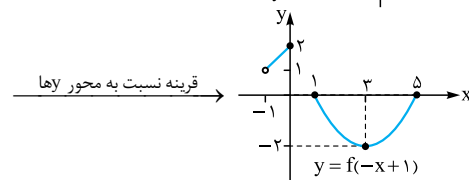
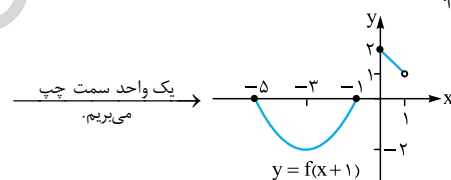
رسم می‌کنیم.

ب مراحل را طی می‌کنیم:

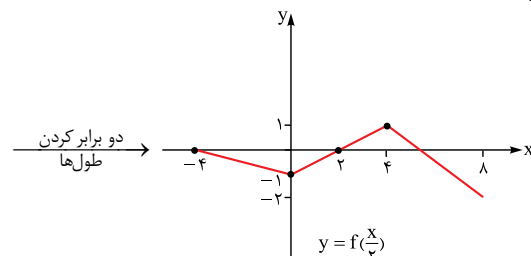


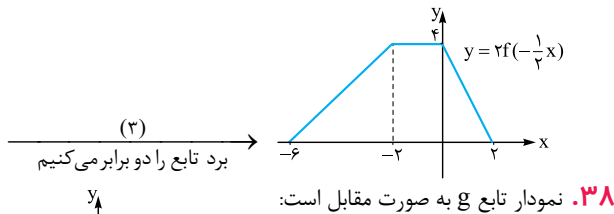
$$D_g = [1, 5], R_g = [0, 4]$$

۳۲. برای رسم $y = f(-x+1) + 1$ ، ابتدا نمودار $f(x)$ را ۱ واحد سمت چپ برده و سپس آن را نسبت به محور y ها قرینه کرده و نمودار حاصل را ۱ واحد بالا می‌بریم.



۳۳. برای رسم $g(x) = -3f(x/4) + 2$ از روی $f(x)$ ، ابتدا طول‌ها را دو برابر کرده، سپس عرض نقاط را در (-3) ضرب و نمودار حاصل را ۲ واحد بالا می‌بریم.

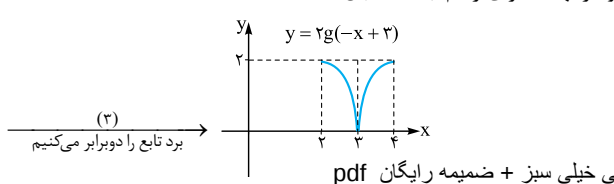
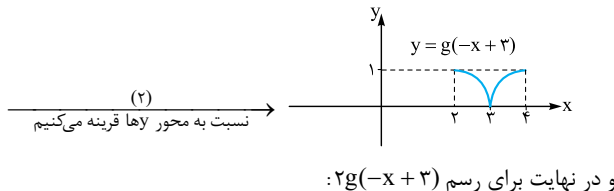
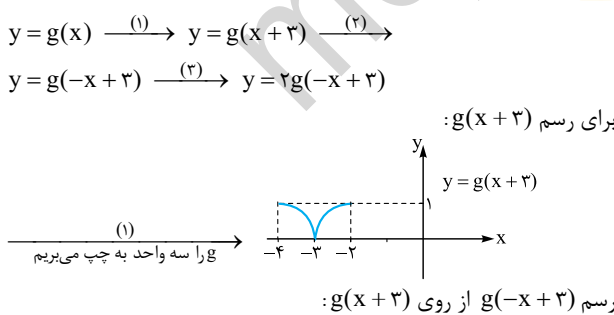
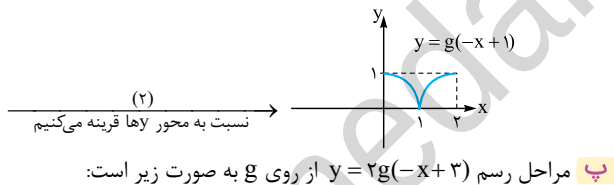
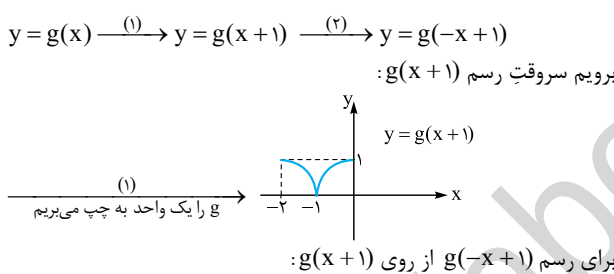
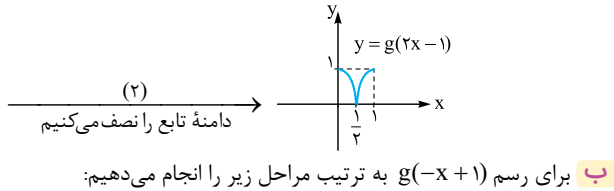
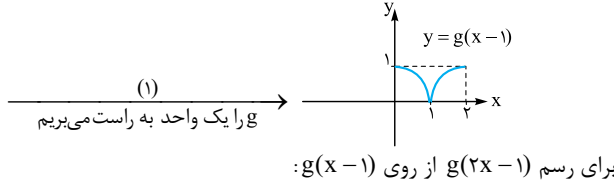




الف برای رسم $g(2x-1)$ به ترتیب، مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

$$g(x) \xrightarrow{(1)} g(x-1) \xrightarrow{(2)} g(2x-1)$$

$g(x)$ را که داریم، پس $g(x-1)$ را به دست می‌آوریم:



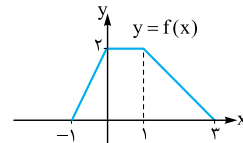
۳۶. الف در این قسمت نمودار تابع f ، یک واحد به سمت چپ آمده ولی برد تابع هیچ تغییری نکرده، پس این تابع، $f(x+1)$ است. (تغییر روی x برعکسه.)

ب در این قسمت نمودار تابع f ، یک واحد بالا آمده است ولی دامنه تغییری نکرده، پس این تابع، $f(x)+1$ است.

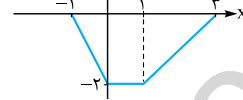
پ فب! با کمی دقت متوجه می‌شویم که نمودار یک واحد به راست و دو واحد پایین آمده پس این تابع، $f(x-1)-2$ است.

ت نمودار یک واحد به چپ آمده و یک واحد هم بالا؛ یعنی این تابع، $f(x+1)+1$ است.

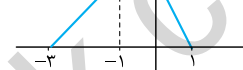
۳۷. نمودار f به صورت مقابل است:



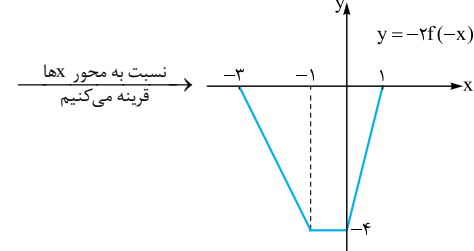
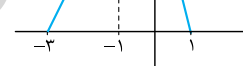
الف برای رسم $-f(x)$ ، نمودار f را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم، ببینید:



ب برای رسم $f(-x)$ ، این بار نمودار f را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم:

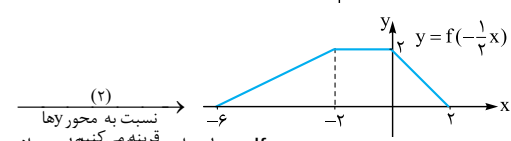
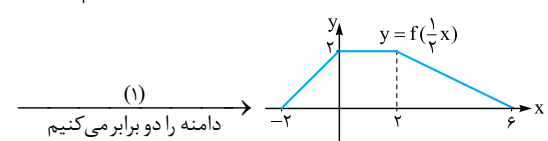
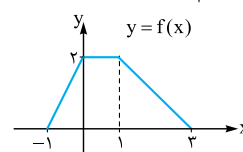


پ برای رسم $-2f(-x)$ باید برد $f(-x)$ (نمودار قسمت ب) را دو برابر کنیم و سپس نمودار حاصل را نسبت به محور x ها قرینه کنیم.

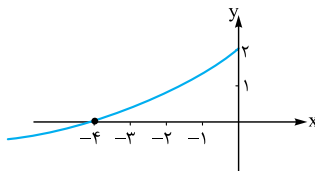


ت برای رسم $2f(-\frac{1}{4}x)$ باید مراحل زیر را انجام دهیم:

$$y = f(x) \xrightarrow{(1)} y = f(\frac{1}{4}x) \xrightarrow{(2)} y = f(-\frac{1}{4}x) \xrightarrow{(3)} y = 2f(-\frac{1}{4}x)$$

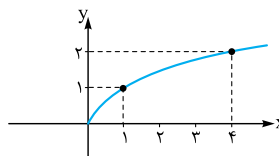


۳۹. باید ضابطه نمودار مقابل را بر حسب $f(x) = \sqrt{x}$ پیدا کنیم.



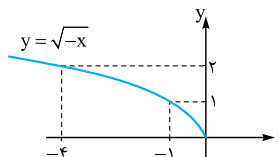
به نمودار $f(x) = \sqrt{x}$ نگاه کنید:

چهارم می‌توانیم از $f(x) = \sqrt{x}$ به ضابطه نمودار خواسته شده برسیم؟

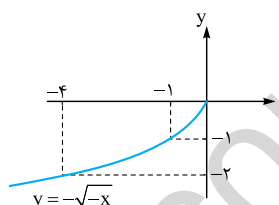


با کمی دقت می‌توان فهمید که باید مراحل زیر را طی کنیم:

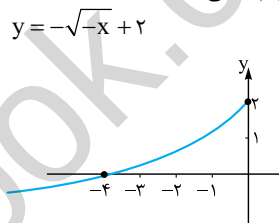
ابتدا نمودار را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم یعنی:



حالا باید $\sqrt{-x}$ را نسبت به محور x ها قرینه کنیم؛ یعنی:



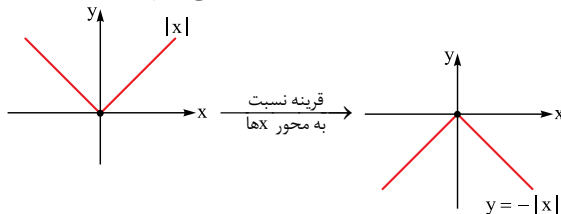
و در گام آخر $-\sqrt{-x}$ را ۲ واحد بالا می‌بریم؛ یعنی:



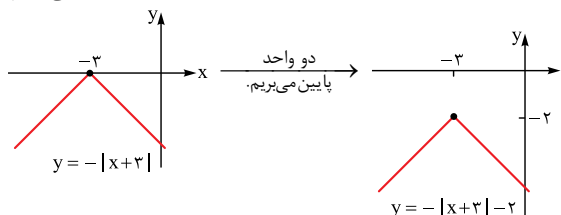
که نمودارش به صورت مقابل است:

پس $y = -\sqrt{-x} + 2$ ضابطه نمودار خواسته شده است. اگر کمی برات سفته، مهربان نیم نگاهی به درس نامه بنداز چون این سوال خیلی مهمه.

۴۰. ابتدا نمودار $|x|$ را رسم کرده و چون نمودار نسبت به محور x ها قرینه شده، ابتدا $|x|$ را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.



حال نمودار به دست آمده را ۳ واحد به چپ و سپس ۲ واحد به پایین انتقال می‌دهیم.



پس ضابطه به صورت $y = -|x+3| - 2$ بوده است.

۴۱. نقطه $A(1, -4)$ بر روی تابع $g(x) = 3 - f(x)$ قرار دارد، یعنی در آن صدق می‌کند؛ پس $g(1) = -4$.

$$g(x) = 3 - f(x) \xrightarrow{x=1} g(1) = 3 - f(1) = -4 \Rightarrow f(1) = 7 \Rightarrow (1, 7) \in f(x)$$

برای به دست آوردن نظیر نقطه A روی تابع $y = \frac{1}{3}f(x-2)$ ، کافی است نقطه $(1, 7)$ را دو واحد به راست انتقال داده و سپس y هایش را ضربدر $\frac{1}{3}$ کنیم.

$$f(x) \Rightarrow f(x-2) \Rightarrow \frac{1}{3}f(x-2)$$

(1, 7) (3, 7) (3, 7/3)

پس نقطه مورد نظر $(3, \frac{7}{3})$ می‌باشد.

$$y = x^2 + 1 \xrightarrow[\text{انقباض عمودی با ضریب } \frac{1}{4}]{\text{انقباض افقی با ضریب } \frac{1}{2}} y = (2x)^2 + 1 = 4x^2 + 1 \quad .42$$

$$\xrightarrow[\text{واحد به چپ}]{\text{انقباض عمودی با ضریب } \frac{1}{4}} 4(x+2)^2 + 1$$

$$\xrightarrow[\text{واحد پایین}]{\text{انقباض عمودی با ضریب } \frac{1}{4}} \frac{1}{4}(4(x+2)^2 + 1)$$

$$\xrightarrow[\text{واحد پایین}]{\text{انقباض عمودی با ضریب } \frac{1}{4}} \frac{1}{4}(4(x+2)^2 + 1) - 3$$

۴۳. از روی نمودار معلوم است که $f(0) = 2$ و $f(-1) = 0$. این نقاط را در تابع صدق می‌دهیم.

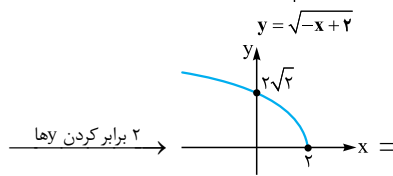
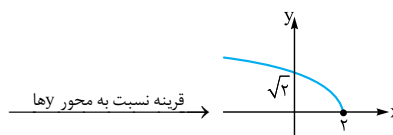
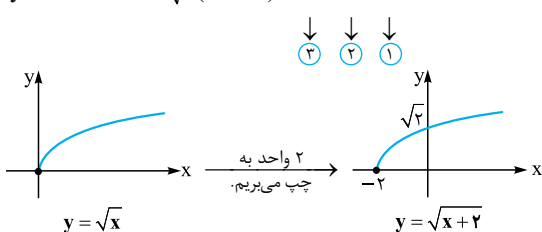
$$f(x) = \sqrt{ax+b} \xrightarrow{f(0)=2} \sqrt{a(0)+b} = \sqrt{b} = 2 \Rightarrow b = 4$$

$$f(x) = \sqrt{ax+4} \xrightarrow{f(-1)=0} \sqrt{a(-1)+4} = 0$$

$$\Rightarrow -a+4=0 \Rightarrow a=4$$

حال برای رسم $\sqrt{-bx+2a} = \sqrt{-4x+8}$ تابع $y = \sqrt{x}$ را مطابق مراحل زیر انتقال می‌دهیم.

$$y = \sqrt{-4x+8} = \sqrt{4(-x+2)} = 2\sqrt{-x+2}$$



۴۴. از روی دامنه $y = 2f(\frac{x-1}{3}) - 5$ ، دامنه $f(x)$ را محاسبه می‌کنیم، به این صورت که x در بازه $[-2, 7]$ قرار دارد و با ساختن $\frac{x-1}{3}$ در آن نامعادله، دامنه $f(x)$ به دست می‌آید، سپس با داشتن دامنه $f(x)$ ، دامنه $y = -f(2-x) - 1$ را به دست می‌آوریم، به این صورت که می‌گوییم $(2-x)$ بین دو عدد قرار دارد (که از مرحله قبل محاسبه کردیم) و x را تنها می‌کنیم.

$$-2 \leq x < 7 \xrightarrow[\text{ساختن } \frac{x-1}{3}]{\text{ساختن } \frac{x-1}{3}} -3 \leq x-1 < 6$$

$$\xrightarrow{\div 3} -1 \leq \frac{x-1}{3} < 2 \Rightarrow D_{f(x)} = [-1, 2)$$

$$-1 \leq 2-x < 2 \xrightarrow{-2} -3 \leq -x < 0$$

$$\xrightarrow{\times (-)} 0 < x \leq 3 \Rightarrow D_{-f(2-x)-1} = (0, 3]$$

۴۵. برد تابع $y = 2f(\frac{x-1}{3}) - 5$ برابر $[-2, 3]$ هست؛ یعنی:

$$-2 \leq 2f(\frac{x-1}{3}) - 5 \leq 3 \Rightarrow 3 \leq 2f(\frac{x-1}{3}) \leq 8 \Rightarrow \frac{3}{2} \leq f(\frac{x-1}{3}) \leq 4$$

می‌دانیم برد تابع $f(\frac{x-1}{3})$ و $f(2-x)$ یکی هست، پس $\frac{3}{2} \leq f(2-x) \leq 4$.

$$\frac{3}{2} \leq f(2-x) \leq 4 \Rightarrow -4 \leq -f(2-x) \leq -\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow -5 \leq -f(2-x) - 1 \leq -\frac{5}{2}$$

پس برد تابع $y = -f(2-x) - 1$ بازه $[-\frac{5}{2}, -5]$ است.



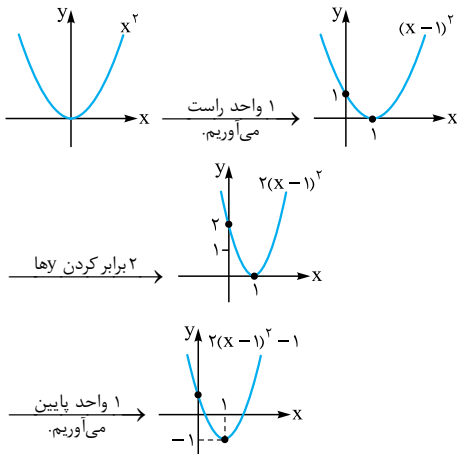
۴۸. ابتدا تابع $y = 2x^2 - 4x + 1$ را به فرم مربع کامل درمی آوریم.

$$y = 2x^2 - 4x + 1 = 2(x^2 - 2x) + 1$$

$$= 2\left(x^2 - 2x + \underbrace{1}_{\substack{\text{اضافه و} \\ \text{کم کردیم}}}\right) + 1 = 2((x-1)^2 - 1) + 1$$

$$y = 2(x-1)^2 - 2 + 1 \Rightarrow y = 2(x-1)^2 - 1$$

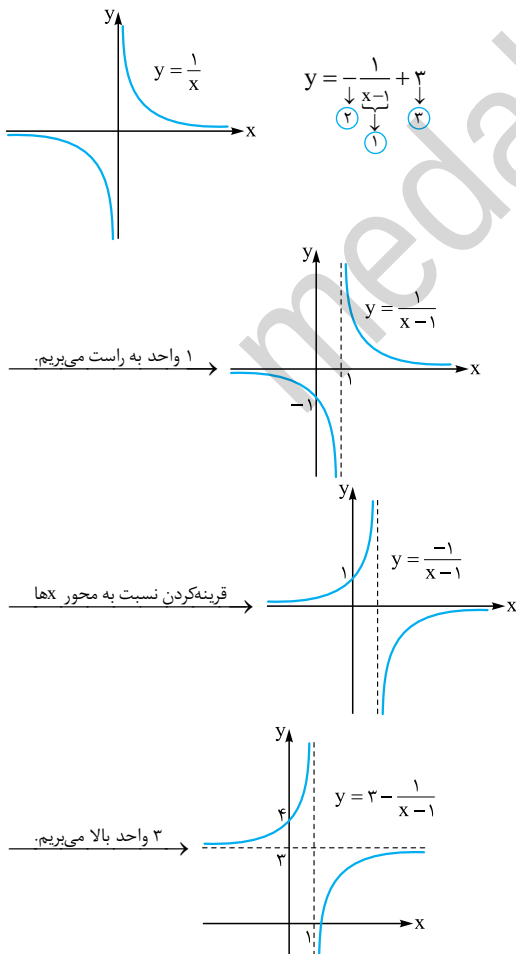
حال برای رسم $y = 2(x-1)^2 - 1$ از روی $y = x^2$ این مراحل را طی می کنیم.



۴۹. برای رسم $y = \frac{3x-4}{x-1}$ از روی تابع $y = \frac{1}{x}$ کمی آن را ساده تر می کنیم.

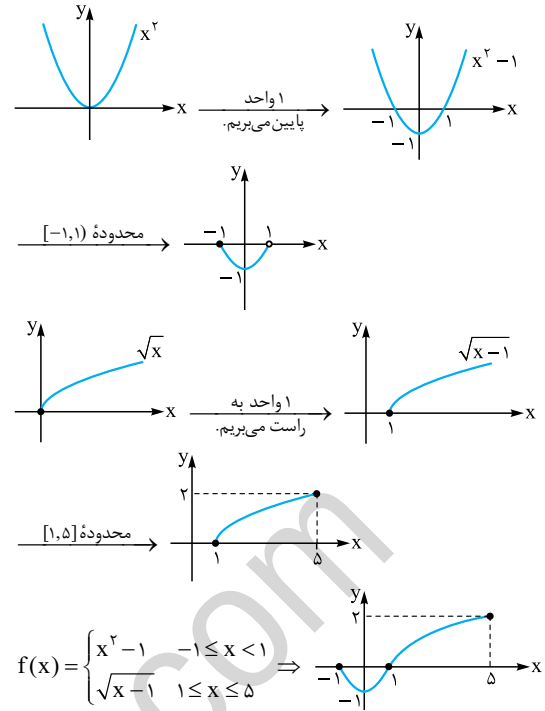
$$y = \frac{3x-4}{x-1} = \frac{3x-3-1}{x-1} = \frac{3(x-1)-1}{x-1} = 3 - \frac{1}{x-1}$$

برای رسم $y = 3 - \frac{1}{x-1}$ از روی تابع $y = \frac{1}{x}$ مراحل زیر را طی می کنیم.



۴۶. الف هر ضابطه را جداگانه رسم کرده و محدوده اش را با توجه به دامنه

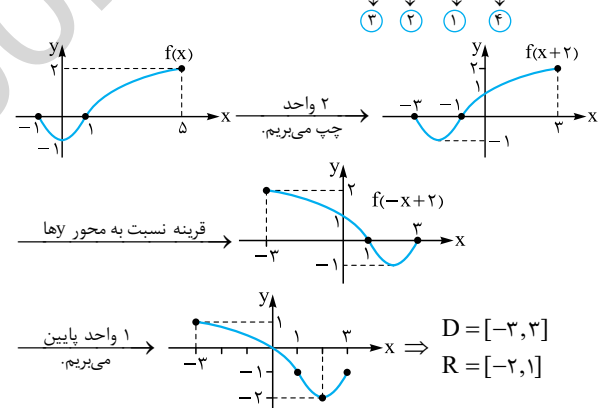
مشخص می کنیم، سپس دو نمودار را در یک دستگاه مختصات رسم می کنیم.



$$D = [-1, 5]$$

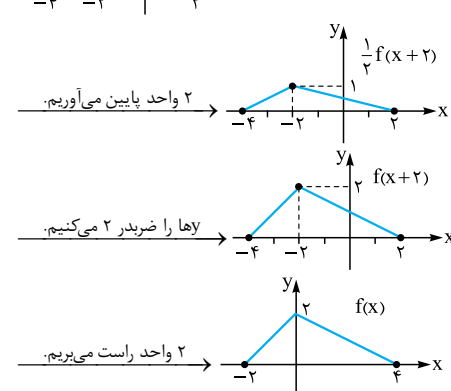
$$R = [-1, 2]$$

ب برای رسم $y = 2f\left(\frac{-x+2}{2}\right) - 1$ از روی $f(x)$ مراحل زیر را طی می کنیم:



۴۷. برای رسم $y = f(x)$ از روی

$y = \frac{1}{3}f(x+2) + 2$ می بایست مراحل را برعکس و از آخر شروع کنیم.



$$D_f = [-2, 4]$$

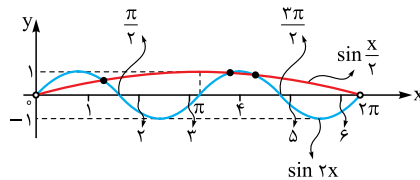
$$R_f = [0, 2]$$

۵۰. وقتی نقطه $(2, -1)$ بر روی تابع $g(x) = -f(1-2x) + 3$ قرار دارد، یعنی $g(2) = -1$.

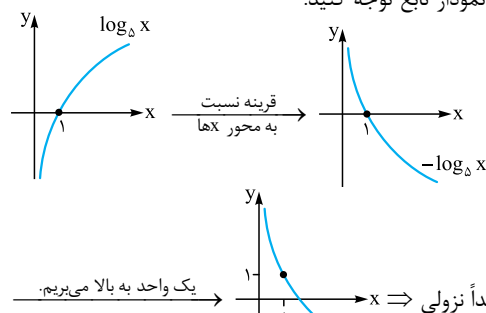
$g(x) = -f(1-2x) + 3$
 $\xrightarrow{x=2} g(2) = -f(1-2(2)) + 3 = -1 \Rightarrow f(-3) = 4$
 $f(-3) = 4$ ، یعنی نقطه $(-3, 4)$ بر روی تابع $f(x)$ قرار دارد. برای یافتن متناظر نقطه $(-3, 4)$ بر روی تابع $h(x) = 2f(\frac{x+1}{3}) - 1$ به صورت زیر عمل می‌کنیم.
 $\frac{x+1}{3} = -3 \Rightarrow x+1 = -9 \Rightarrow x = -10$
 در تابع $h(x) = 2f(\frac{x+1}{3}) - 1$ به جای x عدد -10 را جای گذاری می‌کنیم.
 $x = -10: h(-10) = 2f(-3) - 1$
 $\xrightarrow{f(-3)=4} h(-10) = 2(4) - 1 = 7 \Rightarrow h(-10) = 7$
 پس نقطه $(-10, 7)$ روی تابع $y = 2f(\frac{x+1}{3}) - 1$ قرار دارد.

۵۱. با توجه به مثبت بودن k ، وقتی تابع $y = x^2 + 2x - 2$ را k واحد به راست منتقل می‌کنیم، کافی است به جای همه x ها، $x-k$ قرار دهیم.
 $y = (x-k)^2 + 2(x-k) - 2$
 $\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } x} y = -((x-k)^2 + 2(x-k) - 2)$
 $= -(x-k)^2 - 2(x-k) + 2$
 عرض از مبدأ تابع برابر -1 است، یعنی $(0, -1)$ در تابع صدق می‌کند.
 $-(0-k)^2 - 2(0-k) + 2 = -1$
 $\Rightarrow -k^2 + 2k + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = -1 \\ k = 3 \end{cases}$
 با توجه به این که مقدار k مثبت است، پس $k = 3$ قابل قبول است.

۵۲. کافی است نمودارهای $y = \sin \frac{x}{3}$ و $y = \sin 2x$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنیم.

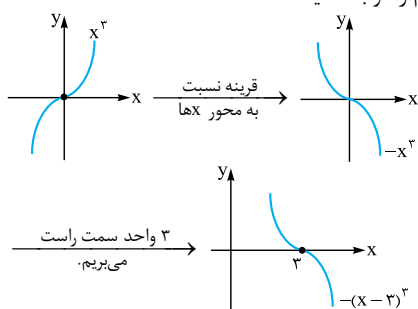


دو تابع همدیگر را در سه نقطه قطع کرده‌اند.
۵۳. نادرست؛ در $x = 0, 1$ مقدار تابع‌ها با هم برابرند؛ یعنی در بازه $(0, 1)$ ، x^3 پایین‌تر از x^2 قرار دارد.
۵۴. نادرست؛ عکس این مطلب درست است.
۵۵. درست
۵۶. درست؛ به نمودار تابع توجه کنید.

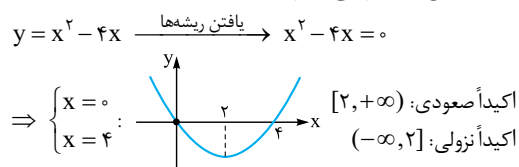


۵۷. درست
۵۸. درست

۵۹. درست؛ مراحل رسم را توجه کنید.



۶۰. درست؛ نمودار تابع را رسم می‌کنیم.



۶۱. درست

۶۲. $[\frac{1}{3}, +\infty)$

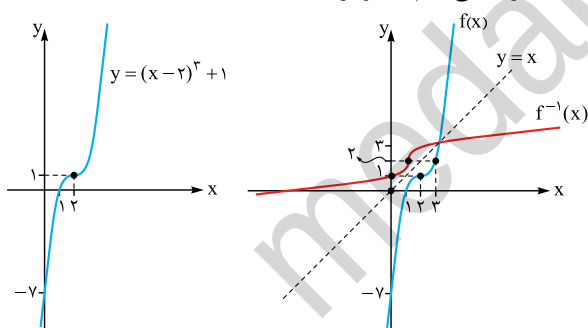
با توجه به این که تابع $f(\frac{1}{3}x) \leq f(x)$ نزولی است، جهت عوض می‌شود.
 $f(3x-2) \leq f(x) \Rightarrow 3x-2 \geq x \Rightarrow x \geq \frac{2}{2} \Rightarrow x \geq 1$

۶۳. یکنوا **۶۴.** ثابت

۶۵. صفر؛ فقط تابع ثابت هم صعودی و هم نزولی هست، برای این که تابع $f(x) = ax + b$ به تابع ثابت تبدیل شود، می‌بایست $a = 0$ باشد تا $f(x) = b$ تابع ثابت شود.

۶۶. چهارم

ابتدا نمودار $f(x) = (x-2)^3 + 1$ را با انتقال تابع $y = x^3$ در راستای محور x ها 2 واحد به راست و یک واحد به بالا، رسم می‌کنیم، سپس آن را نسبت به خط $y=x$ قرینه می‌کنیم تا نمودار $f^{-1}(x)$ به دست آید.



۶۷. است

۶۸. $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ ؛ مراحل وارون کردن را ببینید:

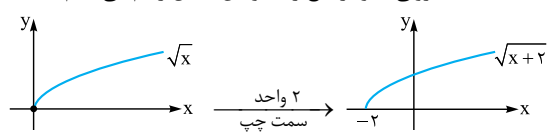
$y = x^3 \xrightarrow{\text{تنها کردن } x} \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{x^3} \Rightarrow \sqrt[3]{y} = x$
 $\xrightarrow{\text{عوض کردن جای } y \text{ و } x} y = \sqrt[3]{x} \text{ یا } f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

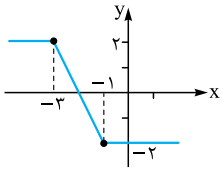
۶۹. $[a, +\infty)$

۷۰. درجه هفت ← طبق قوانین توان‌ها وقتی دو عدد توان‌دار به هم ضرب می‌شوند که پایه‌هایشان با هم برابر هستند، توان‌هایشان با هم جمع می‌شود، پس بزرگ‌ترین توان x برابر است با:

۷۱. $\mathbb{R}$

۷۲. $(-\infty, 2]$ ؛ اکیداً نزولی. نمودار تابع را با قوانین انتقال رسم می‌کنیم.





پس نمودار $f(x)$ به صورت مقابل است:

همان طور که می بینید، این تابع در بازه $(-\infty, -3]$ ثابت، در بازه $[-3, -1]$ اکیداً نزولی و مجدداً در بازه $[-1, +\infty)$ ثابت است. این تابع در کل دامنه اش نزولی است. (پون همش مقدار تابع کم تر می شه یا مساوی می مونه).

۹۶. اگر f یک تابع اکیداً نزولی باشد:

$$f(\bigcirc) > f(\triangle) \Rightarrow \bigcirc < \triangle$$

$$f(x^2 + x^2 + x) < f(x^2 + x + 9)$$

$$\xrightarrow{\text{f اکیداً نزولی است و جهت عوض نمی شود.}} x^2 + x^2 + x > x^2 + x + 9$$

$$\Rightarrow x^2 > 9 \Rightarrow x < -3 \text{ یا } x > 3$$

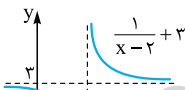
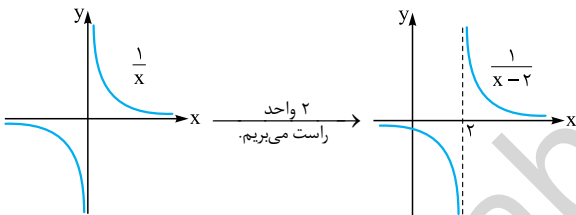
۹۷. تابع $f(x) = \frac{3x-5}{x-2}$ را کمی تغییر می دهیم تا بتوانیم آن را با انتقال

تابع $y = \frac{1}{x}$ رسم کنیم.

۱. اضافه و کم می کنیم.

$$f(x) = \frac{3x-5-1+1}{x-2} = \frac{(3x-6)+1}{x-2} = \frac{3x-6}{x-2} + \frac{1}{x-2} = 3 + \frac{1}{x-2}$$

برای رسم $f(x) = \frac{1}{x-2} + 3$ ، نمودار $y = \frac{1}{x}$ را دو واحد به راست برده و سپس سه واحد بالا می بریم.



۳ واحد بالا می بریم.

اکیداً نزولی: $(-\infty, 2)$ و اکیداً نزولی: $(2, +\infty)$

کلاً غیر یکنوا هست.

۹۸. طبق تعریف توابع اکیداً صعودی و اکیداً نزولی داریم:

$$\bigcirc > \triangle \begin{cases} \xrightarrow{\text{f اکیداً صعودی جهت عوض نمی شود.}} f(\bigcirc) > f(\triangle) \\ \xrightarrow{\text{g اکیداً نزولی جهت عوض نمی شود.}} g(\bigcirc) < g(\triangle) \end{cases}$$

حال برویم سراغ حل سؤال:

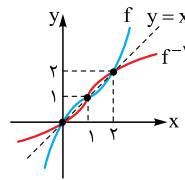
$$x_2 > x_1 \xrightarrow{\text{g اکیداً نزولی جهت عوض نمی شود.}} g(x_2) < g(x_1)$$

$$\xrightarrow{\text{f اکیداً صعودی جهت عوض نمی شود.}} f(g(x_2)) < f(g(x_1))$$

$$\Rightarrow \text{fog}(x_2) < \text{fog}(x_1)$$

$$x_2 > x_1 \Rightarrow \text{fog}(x_2) < \text{fog}(x_1)$$

جهت عوض شده، پس طبق تعریف تابع اکیداً نزولی، تابع fog اکیداً نزولی است.



ب همان طور که می بینید تابع $f(x) = (x-1)^2 + 1$ یک به یک است (هر خط موازی محور x ها نمودار رو حداکثر توی یه نقطه قطع می کنه)؛ پس وارون پذیر هم است. نمودار f^{-1} و f نسبت به خط $y = x$ قرینه اند، پس نمودار f^{-1} به صورت مقابل است:

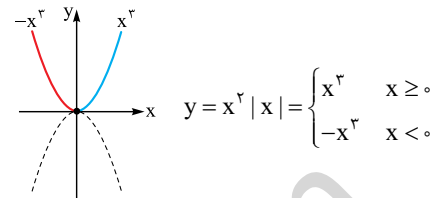
پ ضابطه f^{-1} به صورت زیر است:

$$y = (x-1)^2 + 1 \Rightarrow (x-1)^2 = y-1 \Rightarrow x-1 = \sqrt{y-1} \Rightarrow x = \sqrt{y-1} + 1$$

جای x و y را عوض می کنیم.

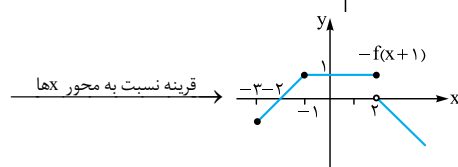
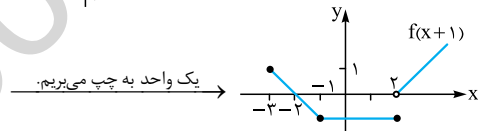
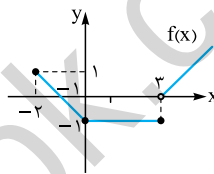
$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x-1} + 1$$

۹۲. با تعیین علامت $|x|$ نمودار تابع را رسم می کنیم.



این تابع در بازه $(-\infty, 0]$ و هر زیرمجموعه از آن اکیداً نزولی است، پس حداکثر مقدار a برابر صفر است.

۹۳. برای رسم نمودار $y = -f(x+1)$ از روی نمودار $f(x)$ ، ابتدا آن را یک واحد به چپ برده و سپس نسبت به محور x ها قرینه می کنیم.



نزولی $[-1, +\infty)$ و صعودی $[-3, 2]$

اکیداً نزولی $(2, +\infty)$ و اکیداً صعودی $[-3, -1]$

هم صعودی و هم نزولی: $[-1, 2]$

۹۴. در تعیین درجه توابع چندجمله ای، معمولاً جمله با بیشترین توان مهم است. (هر اگفته معمولاً چون ممکنه با اعمال پیری اون جمله با بیشترین توان حذف بشه)

$$f(x) = ax^4, g(x) = bx^6$$

$$y_1 = f(x) \times g(x) = (ax^4)(bx^6) = abx^{10}$$

درجه $y_1 = f(x) \times g(x)$ برابر با 10 ($4+6=10$) است.

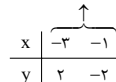
$$y_2 = \text{fog}(x) = f(g(x)) = a(bx^6)^4 = ab^4 x^{24}$$

درجه $y_2 = \text{fog}(x)$ برابر با 24 ($4 \times 6 = 24$) است.

۹۵. رسم تابع $f(x) = |x+1| - |x+3|$ به صورت زیر انجام می شود:

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1, x+3=0 \Rightarrow x=-3$$

(واسه رسم، سر و ته دامنه رو بپوش می ریم.)



$$x < -3 \Rightarrow f(x) = -(x+1) + (x+3) \Rightarrow f(x) = 2$$

$$-3 \leq x < -1 \Rightarrow f(x) = -(x+1) - (x+3) \Rightarrow f(x) = -2x - 4$$

$$x \geq -1 \Rightarrow f(x) = (x+1) - (x+3) \Rightarrow f(x) = -2$$

۱۱۳. درست؛ باقی‌مانده چندجمله‌ای از درجه صفر است، یعنی:

$r(x)$ عدد

$$2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}, f(x) = x^3 + 2$$

$$\xrightarrow{x=\frac{1}{2}} f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 2 = \frac{17}{8} \Rightarrow r = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{17}{8} = \text{عدد}$$

$$x^6 - 64 = (x+2)(x^5 - 2x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 16x - 32) \quad \text{۱۱۴. نادرست}$$

$$x^6 - 1 = (x+1)(x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1) \quad \text{۱۱۵.}$$

$$f(x) = x^2 + ax^2 + bx + 1 \quad \text{۱۱۶.}$$

$$f(2) = 0 \Rightarrow 4 + 4a + 2b + 1 = 4a + 2b + 9 = 0$$

$$\Rightarrow 4a + 2b = -9 \quad (1)$$

$$f(-1) = 0 \Rightarrow -1 + a - b + 1 = a - b = 0 \Rightarrow a = b$$

$$\xrightarrow{(1)} 4a + 2a = -9 \Rightarrow a = -\frac{9}{6}, b = -\frac{9}{6}$$

۱۱۷. باقی‌مانده $p(x)$ و $q(x)$ بر $(x+2)$ یکسان می‌باشد، یعنی:

$$p(-2) = q(-2)$$

$$\begin{cases} p(-2) = -8 - 2a + 1 = -2a - 7 \\ q(-2) = 8 + 2 + 1 = 11 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -2a - 7 = 11 \Rightarrow -2a = 18 \Rightarrow a = -9$$

$$x^5 + 32 = (x+2)(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16) \quad \text{۱۱۸.}$$

۱۱۹. برای یافتن باقی‌مانده ریشه $x+1$ را در $p(x)$ جای گذاری می‌کنیم.

$$2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$r = p\left(-\frac{1}{2}\right) = 8\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 4\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2 = -1 - 1 + 2 = 0 \Rightarrow r = 0$$

۱۲۰. برای محاسبه باقی‌مانده ریشه $x+1$ را در $p(x)$ جای گذاری می‌کنیم.

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow r = p(-1) = 2p(-1) = 2$$

$$\Rightarrow p(-1) = (-1)^4 + k(-1)^2 - 3 = 2 \Rightarrow 1 + k = 5 \Rightarrow k = 4$$

۱۲۱. کافی است عبارت $x^5 + 1$ را به عامل‌هایش تجزیه کنیم.

$$\frac{x^5 + 1}{x + 1} = \frac{(x+1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)}{x + 1} = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$$

$$x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) \quad \text{۱۲۲.}$$

۱۲۳. چندجمله‌ای $f(x) = x^2 + ax - 8$ بر $x-a$ بخش پذیر است، یعنی باقی‌مانده برابر صفر است.

$$x-a=0 \Rightarrow x=a, r=f(a)=0$$

$$f(a) = a^2 + a(a) - 8 = 0 \Rightarrow 2a^2 - 8 = 0 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2$$

۱۲۴. باقی‌مانده تقسیم $P(x)$ بر $x-2$ برابر ۳ باشد، یعنی $P(2) = 3$.

باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $x+2$ ، یعنی $r = f(-2)$.

$$P(2) = 3 \Rightarrow P(2) = 2(2)^2 + m(2) + 2m + 1 = 3$$

$$\Rightarrow 12 + 4m = 3 \Rightarrow 4m = -9 \Rightarrow m = -\frac{9}{4}$$

$$r = f(-2) = -\frac{9}{4}(-2)^2 - (-\frac{9}{4})(-2) + 3 = -9 - \frac{9}{2} + 3 = -12\frac{1}{2}$$

۱۲۵. چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x-2$ بخش پذیر است؛ پس $p(2) = 0$.

$$x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow r = p(2) = 0 \Rightarrow (2)^3 + m(2) + 2 = 0$$

$$\Rightarrow 2m + 10 = 0 \Rightarrow m = -5$$

پس ضابطه چندجمله‌ای برابر است با $p(x) = x^3 - 5x + 2$. برای محاسبه باقی‌مانده $p(x)$ بر $x+1$ کافی است مقدار $p(-1)$ را به دست آوریم.

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow r = p(-1) = (-1)^3 - 5(-1) + 2 = 6 \Rightarrow r = 6$$

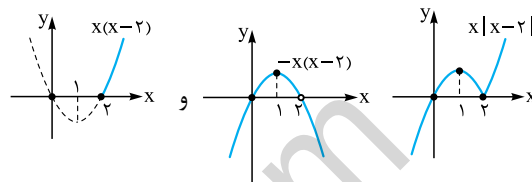
نکته: الف اگر f و g دو تابع اکیداً صعودی (صعودی) باشد، $f+g$ هم اکیداً صعودی (صعودی) خواهد بود.

ب اگر f و g دو تابع اکیداً نزولی (نزولی) باشد، $f+g$ هم اکیداً نزولی (نزولی) خواهد بود.

در تابع $f(x) = x^2 + 2^x$ ، هم x^2 و هم 2^x اکیداً صعودی هستند، پس جمعشان هم اکیداً صعودی خواهد بود؛ یعنی $f(x) = x^2 + 2^x$ اکیداً صعودی است.

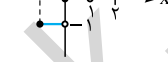
۱۰۰. با تعیین علامت $|x-2|$ ، نمودار را رسم می‌کنیم:

$$f(x) = x|x-2| = \begin{cases} x(x-2) & x \geq 2 \\ -x(x-2) & x < 2 \end{cases}$$

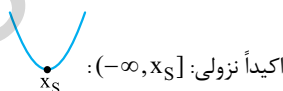


از روی نمودار مشخص است که تابع در بازه $[1,2]$ اکیداً نزولی است.

۱۰۱. با توجه به نمودار $f(x) = [x]$ می‌توان گفت این تابع در دامنه‌اش صعودی و یکنوا است.



۱۰۲. برای این که تابع $f(x) = (3a-6)x + 7$ هم صعودی باشد و هم نزولی، باید تابع ثابت باشد؛ پس $3a-6=0 \Rightarrow a=2$. تابع $g(x) = x^2 - 6x + 2$ یک سهمی رو به بالا است که در آن بزرگ‌ترین بازه‌ای که اکیداً نزولی است $(-\infty, x_S]$ می‌باشد.



$$g(x) = x^2 - 6x + 2 \Rightarrow x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2(1)} = 3$$

پس $g(x)$ در بازه $(-\infty, 3]$ اکیداً نزولی است.

۱۰۳. -2 ؛ چون باقی‌مانده $f(x)$ بر $(x+1)$ برابر ۲ است، پس $f(-1) = 2$. حالا به جای x در f ، -1 می‌گذاریم:

$$(-1)^2 + k(-1) - 1 = 2 \Rightarrow 1 - k - 1 = 2 \Rightarrow k = -2$$

۱۰۴. ۷؛ باقی‌مانده $f(x)$ بر $(x-1)$ ، یعنی $f(1)$ را بیابید:

$$x-1=0 \Rightarrow f(1) = 1^2 + 2(1) + 4 = 7$$

$$r(x) = 0 \quad \text{۱۰۵. فرد}$$

$$f\left(-\frac{b}{a}\right) \quad \text{۱۰۸.} \quad a^2x \quad \text{۱۰۷.}$$

۱۰۹. نادرست؛ برای این که $f(x) = x^{16} + 1$ بخش پذیر باشد، می‌بایست $f(-1) = 0$.

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1, f(x) = x^{16} + 1$$

$$\xrightarrow{x=-1} f(-1) = (-1)^{16} + 1 = 2 \neq 0$$

۱۱۰. درست

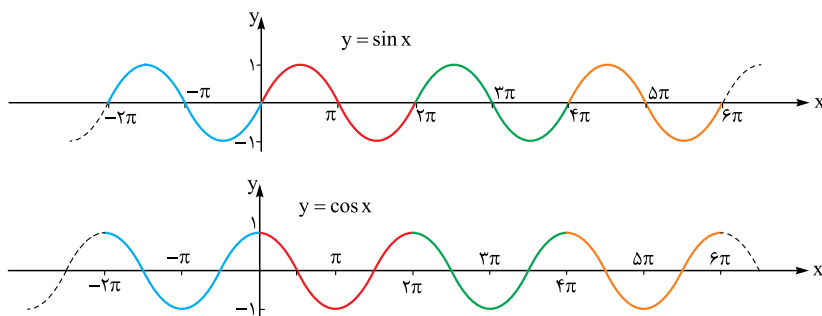
$$x+2=0 \Rightarrow f(-2) = 2(-2)^3 + 5(-2)^2 - 3(-2) - 10 = -16 + 20 + 6 - 10 = 0$$

$$f(-1) = 0, f\left(\frac{3}{4}\right) = 0 \quad \text{۱۱۲. درست}$$

فصل ۲: مثلثات

بخش ۱: تناوب

سال گذشته با نمودارهای $\sin x$ و $\cos x$ آشنا شدیم.

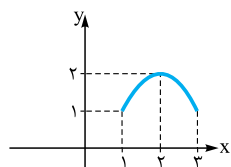


همان‌طور که از روی نمودارها می‌بینید این دو تابع در بازه‌های $[0, 2\pi]$ و $[2\pi, 4\pi]$... تکرار می‌شوند. این تابع‌ها را **متناوب** می‌نامیم. یعنی اگر نمودار هر کدام از این توابع را در یک بازه به طول 2π داشته باشیم، می‌توانیم تابع را در کل دامنه رسم کنیم.

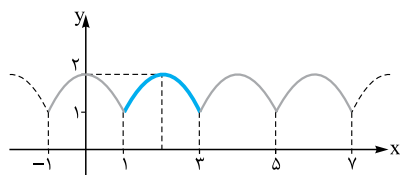
دوره تناوب

اگر برای تابع f ، عدد حقیقی مثبت T وجود داشته باشد به طوری که $x \in D_f$ داشته باشیم $(x \pm T) \in D_f$ و $f(x \pm T) = f(x)$ باشد، می‌گوییم تابع f متناوب است و به کوچک‌ترین مقدار مثبت T می‌گوییم دوره تناوب تابع f .

مثلاً عدد 2π که کوچک‌ترین بازه‌ای است که $\sin x$ و $\cos x$ در آن تکرار می‌شوند را **دوره تناوب** این دو تابع می‌نامیم و می‌نویسیم:



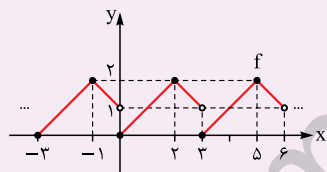
$$T = 2\pi$$



اگر نمودار تابعی با دوره تناوب ۲ در بازه $[1, 3]$ به صورت مقابل باشد:

به راحتی می‌توانیم کل تابع را در دامنه $\mathbb{R}$ رسم کنیم:

مثال: نمودار تابع f به صورت مقابل است. حاصل $f(96) + f(101)$ چقدر است؟



پاسخ: با توجه به نمودار، تابع f یک تابع متناوب با دوره تناوب $T = 3$ است. هر ضرب صحیحی از دوره تناوب را می‌توان کم کرد و مقدار تابع را در نقطه جدید به دست آورد، چون تابع تناوب است و مقدار تابع در آن دو نقطه با هم برابر است. $f(101) = f(33(3) + 2) = f(2) = 2$ برای پیدا کردن $f(101)$ ، $f(96) = f(32(3) + 0) = f(0) = 0$ برای پیدا کردن $f(96)$ ، $f(96) = f(0)$ قرار می‌گیریم؛ پس $f(101) + f(96) = f(2) + f(0) = 2 + 0 = 2$

نکته: اگر دوره تناوب تابع $y = f(x)$ برابر T باشد، دوره تناوب تابع $y = af(bx + c) + d$ برابر $\frac{T}{|b|}$ خواهد بود. در واقع فقط انبساط و انقباض افقی دوره تناوب را تغییر می‌دهد.

مثال: اگر دوره تناوب $y = f(x) - 3$ برابر ۱۲ باشد، دوره تناوب $y = 2f(6x)$ را بیابید.

پاسخ: دوره تناوب $y = f(x)$ و $y = f(x - 1)$ با هم برابر است، چون انبساط و انقباض افقی‌ای رخ نداده است؛ پس دوره تناوب $y = f(x)$ $T = 12$ است.

$$y = f(x) \xrightarrow{\text{۶ بارها را به ۶ تقسیم می‌کنیم}} y = f(6x) \xrightarrow{\text{۲ بارها را دو برابر می‌کنیم}} y = 2f(6x)$$

$$T = 12$$

$$T = \frac{12}{6} = 2$$

$$T = 2$$

پس دوره تناوب $y = 2f(6x)$ $T = 2$ است. pdf مآجرای بیست حسابان دوازدهم ریاضی خیلی سبز + ضمیمه رایگان



دوره تناوب توابع $y = a \cos bx$ و $y = a \sin bx$ در حالت کلی تر دوره تناوب $y = a \sin bx$ و $y = a \cos bx$ برابر است با $\frac{2\pi}{|b|}$. (یاد تون باشه $b \neq 0$)
 دلیلش هم این است که وقتی از روی $f(x)$ بخواهیم $f(bx)$ را رسم کنیم، باید دامنه f را $\frac{1}{b}$ برابر کنیم، پس دوره تناوب هم $\frac{1}{b}$ برابر می شود؛ یعنی $\frac{2\pi}{|b|}$. (قدر مطلق هم واسه اینکه دوره تناوب باید مثبت باشه).
 برای مثال دوره تناوب تابع $f(x) = \cos 2x$ برابر است با: $T = \frac{2\pi}{|2|} = \pi$

مثال: دوره تناوب هر یک از تابع های زیر را پیدا کنید.

الف) $f(x) = \sin 3x$

ب) $g(x) = \cos(\frac{x}{5})$

پ) $h(x) = \sin(2\pi x)$

ت) $k(x) = \cos(\sqrt{2}x)$

ث) $t(x) = \sin(-\frac{2}{3}x)$

ج) $s(x) = \cos(-\sqrt{2}\pi x)$

پاسخ: دوره تناوب تابع های $y = \sin ax$ و $y = \cos ax$ ، $\frac{2\pi}{|a|}$ است. پس می توان نوشت:

الف) $T = \frac{2\pi}{|3|} = \frac{2\pi}{3}$

ب) $T = \frac{2\pi}{|\frac{1}{5}|} = 10\pi$

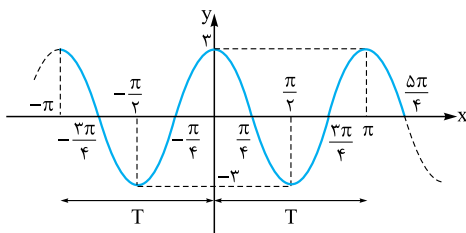
پ) $T = \frac{2\pi}{|2\pi|} = 1$

ت) $T = \frac{2\pi}{|\sqrt{2}|} = \sqrt{2}\pi$

ث) $T = \frac{2\pi}{|-\frac{2}{3}|} = 3\pi$

ج) $T = \frac{2\pi}{|-\sqrt{2}\pi|} = \sqrt{2}$

مثال: تابع $f(x) = 3 \cos 2x$ را رسم کنید و از روی شکل، دوره تناوب آن را پیدا کنید.



پاسخ: از فصل تابع یادمان است برای رسم $3 \cos 2x$ ابتدا $\cos 2x$ را رسم می کنیم (نمودار $\cos x$ در راستای محور x ها $\frac{1}{2}$ برابر شه). سپس برد تابع را 3 برابر می کنیم. پس نمودار تابع

$f(x) = 3 \cos 2x$ به صورت مقابل است:

همان طور که از روی نمودار می بینید، دوره تناوب f ، π است؛ پس دوره تناوب تابع های $3 \cos 2x$ و $\cos 2x$ با هم برابرند (فهریب 3 توی دوره تناوب تأثیر نداره).

دوره تناوب توابع $y = a \cos(bx + c) + d$ و $y = a \sin(bx + c) + d$ دوره تناوب تابع های $y = a \cos(bx + c) + d$ و $y = a \sin(bx + c) + d$ برابر با

$\frac{2\pi}{|b|}$ است؛ یعنی هیچ کدام از اعداد a و c و d در دوره تناوب تابع تأثیری ندارند. به صورت کلی تبدیلی هایی که باعث تغییر برد تابع (d, a) و انتقال افقی (c) می شوند، تأثیری روی دوره تناوب ندارند. برای فهم بهتر تأثیر نداشتن انتقال افقی، تصور کنید دوره تناوب یک تابع را روی یک خط کش مثلاً به طول 2π (در توابع $\sin x$ و $\cos x$) سمت راست یا چپ انتقال بدهیم. آیا طول خط کش عوض می شود؟ طبیعتاً خیر. پس انتقال افقی روی دوره تناوب تأثیری ندارد.

مثال: دوره تناوب هر یک از تابع های زیر را به دست آورید.

الف) $f(x) = 2 \sin(2x - \frac{\pi}{6}) + 3$

ب) $g(x) = -\cos(\frac{\pi}{3} - 3x) + \sqrt{2}$

پ) $h(x) = 3 \sin(3(x - \frac{\pi}{3})) + 3$

ت) $t(x) = -2 \cos(\frac{\pi}{4}x - \sqrt{2}) + \frac{1}{4}$

پاسخ: طبق نکته قبل، دوره تناوب تابع های $y = a \sin(bx + c) + d$ و $y = a \cos(bx + c) + d$ برابر $\frac{2\pi}{|b|}$ است، پس:

الف) $T = \frac{2\pi}{|2|} = \pi$

ب) $T = \frac{2\pi}{|3|} = \frac{2\pi}{3}$

پ) $T = \frac{2\pi}{|3|} = \frac{2\pi}{3}$

ت) $T = \frac{2\pi}{|\frac{\pi}{4}|} = 8$

یپه ها یاد تون باشه در رابطه $T = \frac{2\pi}{|b|}$ ، b فزیه x است.

ماکزیمم و مینیمم توابع مثلثاتی

همان طور که می دانید برد تابع های $y = \sin x$ و $y = \cos x$ بازه $[-1, 1]$ است و این یعنی ماکزیمم مقدار این تابع ها 1 و مینیمم مقدارشان -1 است. در حالت کلی تر تابع های $y = a \sin(bx + c) + d$ و $y = a \cos(bx + c) + d$ دارای ماکزیمم $|a| + d$ و مینیمم $-|a| + d$ هستند. (اصلاً b و c

روی مهوره y تأثیری نداره پس روی $\max$ و $\min$ تابع هم هیچ نقشی نداره).

همچنین برای به دست آوردن a و d می‌توانیم از $\max$ و $\min$ تابع استفاده کنیم: (منظور از d عدد ثابت و a ضریب تابع مثلثاتی)

$$\begin{cases} \max = |a| + d \\ \min = -|a| + d \end{cases} \quad \text{حل دستگاه دو معادله - دو مجهول}$$

مثال: ماکزیمم و مینیمم هر یک از تابع‌های زیر را پیدا کنید.

الف) $y = 3\sin(2x) - 2$ ب) $y = 1 - \frac{1}{4}\cos(3x)$ پ) $y = -\pi\sin(\frac{x}{4} + 1)$ ت) $y = -\frac{1}{4}\cos(x + 1) + \pi$

پاسخ: ماکزیمم هر تابع به صورت $y = a\sin(bx + c) + d$ و $y = a\cos(bx + c) + d$ برابر است با $|a| + d$ و مینیممشان $-|a| + d$ است. پس می‌توان نوشت:

الف) $\max = |3| - 2 = 1, \min = -|3| - 2 = -5$ ب) $\max = |-\frac{1}{4}| + 1 = \frac{5}{4}, \min = -|-\frac{1}{4}| + 1 = \frac{3}{4}$
 پ) $\max = |-\pi| + \pi = \pi, \min = -|-\pi| + \pi = -\pi$ ت) $\max = |-\frac{1}{4}| + \pi = \pi + \frac{1}{4}, \min = -|-\frac{1}{4}| + \pi = \pi - \frac{1}{4}$

فب! تا حالا با دوره تناوب، ماکزیمم و مینیمم تابع‌های مثلثاتی آشنا شدیم، یعنی اگر ضابطه یک تابع مثلثاتی را بدهند به راحتی می‌توانیم دوره تناوب، ماکزیمم و مینیمم آن را به دست آوریم و البته برعکس. (یعنی چی؟) یعنی با داشتن دوره تناوب، ماکزیمم و مینیمم یک تابع مثلثاتی می‌توانیم ضابطه‌اش را به دست آوریم.

مثال: دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک از تابع‌های زیر را پیدا کنید.

الف) $y = 2\sin(2x) - 3$ ب) $y = \frac{\pi}{4}\cos(-\pi x)$ پ) $y = -\cos(-\frac{\pi}{3}x) + 1$ ت) $y = -8\sin(\frac{2x}{3} - 5) - 1$

پاسخ:
 الف) $y = 2\sin(2x) - 3 : T = \frac{2\pi}{|2|} = \pi, \max = |2| - 3 = -1, \min = -|2| - 3 = -5$
 ب) $y = \frac{\pi}{4}\cos(-\pi x) : T = \frac{2\pi}{|-\pi|} = 2, \max = |\frac{\pi}{4}| = \frac{\pi}{4}, \min = -|\frac{\pi}{4}| = -\frac{\pi}{4}$
 پ) $y = -\cos(-\frac{\pi}{3}x) + 1 : T = \frac{2\pi}{|-\frac{\pi}{3}|} = 6, \max = |-1| + 1 = 0, \min = -|-1| + 1 = 0$
 ت) $y = -8\sin(\frac{2x}{3} - 5) - 1 : T = \frac{2\pi}{|\frac{2}{3}|} = 3\pi, \max = |-8| - 1 = -9, \min = -|-8| - 1 = -9$

مثال: برای هر یک از ضابطه‌ها، به کمک اطلاعات داده‌شده a و b را به دست آورید و ضابطه تابع را بازنویسی کنید.

الف) $y = a\sin bx + d \quad (a > 0) : T = \pi, \max = 3, \min = -3$
 ب) $y = a\cos bx + d : T = 4\pi, \max = -1, \min = -7$

پاسخ: الف) می‌دانیم دوره تناوب این تابع برابر است با $T = \frac{2\pi}{|b|}$ ، پس می‌توان نوشت:
 $\frac{2\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = 2$
 از طرفی در مورد a و d داریم:

$$\begin{cases} |a| + d = \max \\ -|a| + d = \min \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |a| + d = 3 \\ -|a| + d = -3 \end{cases} \Rightarrow d = 0, |a| = 3 \xrightarrow{a > 0} a = 3$$

پس ضابطه تابع داده‌شده به یکی از صورت‌های مقابل است: (مفتشون درسته)

ب) دوره تناوب تابع داده‌شده برابر است با:

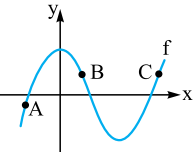
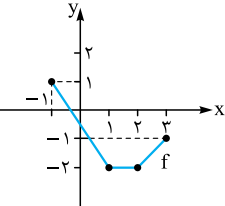
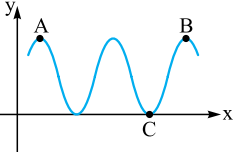
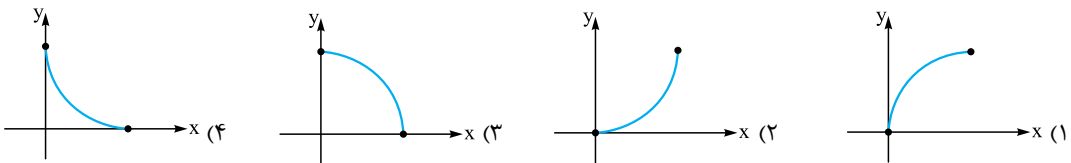
$$\begin{cases} |a| + d = \max \\ -|a| + d = \min \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |a| + d = -1 \\ -|a| + d = -7 \end{cases} \Rightarrow d = -4, |a| = 3$$

پس ضابطه تابع داده‌شده به صورت مقابل است:

(یاد تون باشه $\cos$ منفی فواره، پس $\cos(\frac{-1}{4}x)$ فرقی با $\cos(\frac{1}{4}x)$ نداره.)
 $y = 3\cos(\frac{1}{2}x) - 4, y = -3\cos(\frac{1}{2}x) - 4$

برای خرید این کتاب از مَدابوک روی همین جمله کلیک کنید

آزمون‌های نوبت‌اول دوم

ردیف	نمونه امتحان نیم سال دوم	رشته ریاضی و فیزیک	حسابان ۲
نمره	Kheilisabz.com	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	امتحان شماره ۳
۱	جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید. الف) اگر دامنه $f(x) = \sqrt{x-1}$ بازه $[1, 5]$ باشد، برد تابع $y = -2f(x+1) - 3$ بازه است. ب) دوره تناوب تابع $f(x) = 2\cos^2 x - 1$ برابر است. پ) معادله مجانب قائم تابع $y = \frac{1}{x- x }$، است. ت) در نمودار مقابل در نقطه، $f'(x) \cdot f''(x) < 0$ است.		
۲	درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. الف) هر تابع اکیداً یکنوا، حتماً وارون پذیر است. ب) مجموعه جوابهای معادله $\sin x = \frac{1}{3}$ در بازه $[0, \pi]$ برابر π است. پ) تابع $y = \sqrt{x}$ در بازه $[0, +\infty)$ مشتق پذیر است. ت) تابع $y = \tan x$، در دامنه اش نقطه عطف ندارد.		
۳	نمودار تابع $y = f(x)$ مطابق شکل روبه رو است. الف) نمودار تابع $g(x) = -2f(-2x+1) + 1$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را تعیین کنید. ب) بزرگترین بازه‌ای که $g(x)$ در آن صعودی، اکیداً صعودی، نزولی و اکیداً نزولی است را مشخص کنید.		
۴	شکل روبه رو قسمتی از نمودار $f(x) = (\sin x + \cos x)^2$ را نشان می‌دهد. مساحت مثلث ABC چقدر است؟		
۵	اگر $\tan \alpha = 2$ باشد، مقدار $\tan(\frac{\pi}{4} - 2\alpha)$ را به دست آورید.		
۶	حاصل حدهای زیر را به دست آورید. الف) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2-3x+2}$ ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+7} - \sqrt{x-3}}$		
۷	مجانب‌های تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{ x-1 -3}$ را بیابید.		
۸	مشتق پذیری تابع $f(x) = (x-3)[x]$ را در $x=3$ بررسی کنید.		
۹	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن الزامی نیست.) الف) $y = \frac{x(1-x)^3}{(2x+3)(\sqrt{x}+x)}$ ب) $y = \frac{\tan(\frac{1}{x})}{\cos x^2 - \cos^2 x}$		
۱۰	اگر $g(x) = f(x^2 + x + 1)$ باشد و $f'(3) = -\frac{5}{3}$ باشد، مقدار $g'(-2)$ را بیابید.		
۱۱	در کدام یک از توابع زیر، آهنگ تغییر متوسط و آهنگ تغییر لحظه‌ای، هر دو مثبت و نزولی هستند؟ (با دلیل)		
۱۲	خط مماس بر تابع $f(x) = x^3 - ax^2 + b$ در نقطه $(2, -15)$ از آن عبور می‌کند. با به دست آوردن a و b، ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع را بیابید.		
۱۳	جدول رفتار و نمودار $y = \frac{-2x+1}{x-1}$ را رسم کرده و از روی آن نمودار $y = \frac{-2x+1}{x-1}$ را رسم کنید.		
۲۰	جمع نمرات		

الف $y' = \frac{(1(1-x)^2 - 3(1-x)^2 x)((2x+3)(\sqrt{x}+x))}{((2x+3)(\sqrt{x}+x))^2}$ ۹.

$$\frac{(2(\sqrt{x}+x) + (\frac{1}{2\sqrt{x}} + 1)(2x+3))(x(1-x)^2)}{((2x+3)(\sqrt{x}+x))^2} \quad (1/15)$$

ب $y' = \frac{-\frac{1}{x^2}(1+\tan^2(\frac{1}{x}))(\cos x^2 - \cos^2 x)}{(\cos x^2 - \cos^2 x)^2}$

$$\frac{(-2x \sin x^2 + 2 \cos x \sin x) \tan(\frac{1}{x})}{(\cos x^2 - \cos^2 x)^2} \quad (1/15)$$

۱۰. $g'(x) = (2x+1)f'(x^2+x+1)$ (۵/۵)

$$\Rightarrow g'(-2) = -3f'(3) = -3 \times (-\frac{5}{3}) = 5 \quad (۵/۱۵)$$

۱۱. گزینه «۱» (۵/۱۵)
با افزایش x آهنگ تغییر متوسط مثبت و نزولی است. (شیب خطوط قاطع کم می‌شود). (۵/۵)

با افزایش x ، آهنگ تغییر لحظه‌ای مثبت و نزولی است. (شیب خطوط مماس کم می‌شود). (۵/۵)

۱۲. $f'(x) = 3x^2 - 2ax$ (۵/۱۵) ، $x=2$ نقطه عطف

$$f''(x) = 6x - 2a \quad (۵/۱۵) , 12 - 2a = 0 \Rightarrow a = 6 \quad (۵/۱۵)$$

$$f(2) = -15 \Rightarrow -15 = 8 - 24 + b \Rightarrow b = 1 \quad (۵/۱۵)$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x = 0 \Rightarrow x = 0 , x = 4$$

	۰	۴	
f'	+	-	+
f	↗	↘	↗

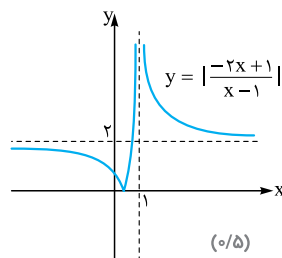
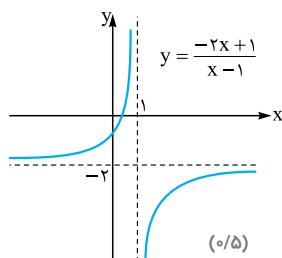
(۵/۱۵) (۰، ۱) ماکزیمم نسبی
(۵/۱۵) (۴، -۳۱) مینیمم نسبی
max min

۱۳. $y = -2$ مجانب افقی (۵/۱۵) ، $x=1$ مجانب قائم (۵/۱۵)

$$y' = \frac{-2(x-1) - 1(-2x+1)}{(x-1)^2} = \frac{1}{(x-1)^2} > 0 \quad (۵/۱۵)$$

$$y'' = \frac{0(x-1)^2 - 2(x-1) \cdot 1}{(x-1)^4} = \frac{-2}{(x-1)^3} \quad (۵/۱۵)$$

x	$-\infty$	۱	$+\infty$
y'	+	+	+
y''	+	-	-
y	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$



پاسخنامه تشریحی

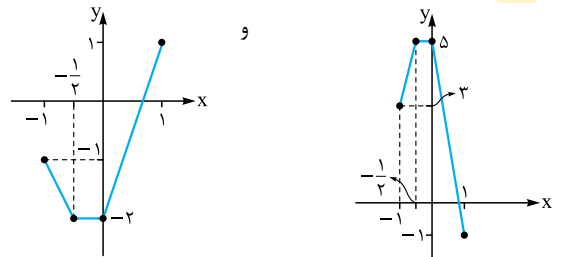
۱. الف $[-7, -3]$ (۵/۱۵) ب π (۵/۱۵)

پ $x=0$ (۵/۱۵) ت A (۵/۱۵)

۲. الف درست (۵/۱۵) ب درست (۵/۱۵)

پ نادرست (۵/۱۵) ت نادرست (۵/۱۵)

۳. الف



$$y = f(-2x+1) \quad (۵/۵) \quad y = -2f(-2x+1)+1 \quad (۵/۵)$$

دامنه: $D = [-1, 1]$ (۵/۱۵) برد: $\mathbb{R} = [-1, 5]$ (۵/۱۵)

ب صعودی: $[-1, 0]$ (۵/۱۵)، اکیدا صعودی: $[-1, -\frac{1}{2}]$ (۵/۱۵)، نزولی: $[-\frac{1}{2}, 1]$ (۵/۱۵)، اکیدا نزولی: $[0, 1]$ (۵/۱۵)

۴. $f(x) = 1 + \sin 2x$ (۵/۱۵)

قاعده مثلث $(AB) = 2T = 2\pi$ (۵/۱۵)

ارتفاع مثلث $(\max - \min) = 2 - 0 = 2$ (۵/۱۵)

مساحت $= \frac{1}{2} \times 2\pi \times 2 = 2\pi$ (۵/۱۵)

۵. $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \times 2}{1 - 2^2} = -\frac{4}{3}$ (۵/۵)

$$\tan(\frac{\pi}{4} - 2\alpha) = \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan 2\alpha}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \cdot \tan 2\alpha} = \frac{1 + \frac{4}{3}}{1 - \frac{4}{3}} = -7 \quad (۵/۷۵)$$

۶. الف $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2-3x+2} \times \frac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^2-4}}$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-1)(x-2)\sqrt{x^2-4}} = \frac{4}{0^+} = +\infty \quad (۵/۷۵)$$

ب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+7} - \sqrt{x-3}} \times \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-1}}$

$$\times \frac{\sqrt{x+7} + \sqrt{x-3}}{\sqrt{x+7} + \sqrt{x-3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2(\sqrt{x+7} + \sqrt{x-3})}{10(\sqrt{x+2} + \sqrt{x-1})}$$

$$= \frac{3 \times 2 \sqrt{x}}{10 \times 2 \sqrt{x}} = \frac{3}{10} \quad (۵/۷۵)$$

۷. $|x-1| - 3 = 0 \Rightarrow x = 4, x = -2$ (۵/۵) مجانب قائم (۵/۱۵)

با توجه به دامنه $[0, +\infty)$ فقط $x=4$ قابل قبول است.

مجاوب افقی: $y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{|x-1|-3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} \times \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ (۵/۱۵)

۸. تابع در $x=3$ مشتق پذیر نیست. (۵/۱۵)

$$f'_+(3) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(x-3)[x]-0}{x-3} = 3 \quad (۵/۵)$$

$$f'_-(3) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(x-3)[x]-0}{x-3} = 2 \quad (۵/۵)$$

ردیف	نمونه امتحان نیم سال دوم	رشتهٔ ریاضی و فیزیک	حسابان ۲
نمره	امتحان شماره ۴	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	Kheilisabz.com
۱	جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید. الف) نقطه $(-۳, ۰)$ روی نمودار $y = f(x)$ با نقطه روی نمودار $y = 2f(-x-1) + 4$ متناظر است. ب) در نمودار مقابل شیب پاره خط AB برابر است. پ) دامنهٔ تابع مشتق $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \geq 0 \\ x^2 - 1 & x < 0 \end{cases}$ برابر می باشد. ت) در تابع $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ، اگر $c \neq 0$ و $d \neq 0$ باشد، آن گاه معادلهٔ این تابع به یک تابع ثابت تبدیل می شود.		۱
۲	درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. الف) اگر $f(x) = ax^3 + bx^2 - 5x - 4$ بر $x - 2$ بخش پذیر باشد، مقدار $2a + b$ برابر $3/5$ است. ب) $x = 0$ معادلهٔ مجانب قائم تابع $y = \frac{\sin x}{x}$ است. پ) مشتق تابع $y = \sin^2 x$ برابر $y' = \sin 2x$ است.		۱
۳	دامنهٔ تابع $y = \sqrt{2^{x+2} - 2^{5x+7}}$ را به دست آورید.		۱
۴	تابع $f(x) = ax^2 - 3$ را به ضریب $\frac{1}{4}$ در جهت افقی منقبض کرده و ۱ واحد به سمت راست منتقل کنیم و تابع حاصل را با ضریب ۳ در جهت عمودی منبسط کرده و ۲ واحد به بالا منتقل کرده و ضابطهٔ تابع حاصل را $g(x)$ می نامیم. اگر باقی ماندهٔ تقسیم $g(x)$ بر $x + 1$ برابر ۵ باشد، مقدار a را بیابید.		۱/۵
۵	دورهٔ تناوب و ماکزیمم و مینیمم تابع $f(x) = \cos 5x \cos 2x - \sin 5x \sin 2x - 4$ را تعیین کنید.		۱
۶	جواب عمومی معادلهٔ $\sqrt{3} \cos^2 x = \sqrt{3} \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + a$ به صورت $\frac{k\pi}{p} + a$ می باشد. a را بیابید.		۱/۷۵
۷	حاصل حدهای زیر را به دست آورید. الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x^2 + 3x + 1} - x^2}{-12x + 5}$ ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \log_{\frac{1}{3}}(2 - x)$		۱/۲۵
۸	اگر نمودار $f(x) = \frac{(ab+1)x^2 + 1}{x^2 + ax + b}$ در اطراف مجانب قائم خود به صورت روبه رو باشد، معادلهٔ مجانب افقی آن را به دست آورید.		۱/۵
۹	با توجه به نمودار روبه رو، حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)g(x) - 3g(x)}{x - 2}$ را بیابید.		۱/۲۵
۱۰	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن الزامی نیست). الف) $y = \frac{1}{2x} (3\sqrt[3]{x-1} + 4)^5$ ب) $y = \sqrt{\tan(\sin(2x^2))}$		۲
۱۱	جسمی را از سطح زمین به طور عمودی پرتاب می کنیم. ارتفاع این جسم از سطح زمین از معادلهٔ $h(t) = -5t^2 + 30t$ به دست می آید. در $t = a$ جسم به بالاترین ارتفاع خود می رسد و در $t = b$ جسم به زمین برمی گردد. آهنگ تغییر متوسط ارتفاع در بازهٔ $[a, b]$ چند برابر آهنگ تغییر لحظه ای در $t = b$ است؟		۱/۷۵
۱۲	نمودار تابع f مطابق شکل روبه رو است. نمودار مشتق آن را رسم کنید.		۰/۵
۱۳	اگر $A(-1, 0)$ نقطهٔ عطف تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 11$ باشد، مشخص کنید تابع $f(x)$ در چه بازه ای اکیداً نزولی است؟		۲
۱۴	با استفاده از نمودار تابع $f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 3$ ، تعداد و علامت جواب های معادلهٔ $2x^3 + 6x^2 - 3 = 0$ را به دست آورید. (برای رسم نمودار، جدول رفتار تابع تشکیل شود).		۲/۵
۲۰	pdf ماجرای بیست حسابان دوازدهم ریاضی خیلی سبز + ضمیمه رایگان pdf		



۱۰. $y' = \frac{1}{x^2} \left(-\frac{1}{x^2} \right) (3\sqrt{x-1} + 4)^5 + 5(3\sqrt{x-1} + 4)^4$ (۵/۲۵) الف

$\times (3 \times \frac{1}{3\sqrt{x-1}}) (\frac{1}{2x})$ (۵/۲۵)

ب $y' = \frac{4x \cdot \cos(2x^2) (1 + \tan^2(\sin(2x^2)))}{2\sqrt{\tan(\sin(2x^2))}}$ (۵/۲۵)

۱۱. $h'(t) = 0 \Rightarrow h'(t) = -1 \cdot t + 3 = 0$ (۵/۲۵) بالا ترین ارتفاع

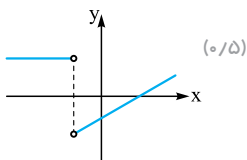
$\Rightarrow t = 3 = a$ (۵/۲۵)

$h(t) = 0 \Rightarrow -\Delta t^2 + 3 \cdot t = 0$ (۵/۲۵) برگشت به زمین

$\Rightarrow t = 0, t = 6 = b$ (۵/۲۵)

آهنگ تغییر متوسط: $\frac{h(6) - h(3)}{6 - 3} = \frac{0 - 4\Delta}{3} = -1\Delta$ (۵/۲۵)
در بازه $[3, 6]$
آهنگ تغییر لحظه‌ای در $t = 6$: $h'(6) = -3 \cdot 0$ (۵/۲۵)

$\Rightarrow \frac{-1\Delta}{-3 \cdot 0} = \frac{1}{3}$ (۵/۲۵)



$f(-1) = 0 \Rightarrow a - b = 12$ (۵/۲۵)

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b, f''(x) = 6x + 2a$

$f''(-1) = 0 \Rightarrow -6 + 2a = 0 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow b = -9$ (۵/۲۵)

$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \Rightarrow x = 1, x = -3$ (۵/۲۵)

x	-3	1
y'	+	-
	↗	↘

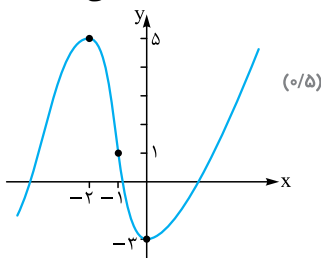
اکیدا نزولی $[-3, 1]$ (۵/۲۵)

$f'(x) = 6x^2 + 12x = 0 \Rightarrow x = 0, x = -2$ (۵/۲۵)

$f''(x) = 12x + 12 = 0 \Rightarrow x = -1$ (۵/۲۵)

x	-2	-1	0
f'	+	-	+
f''	(-)	(-)	(+)
f	↗	↘	↗

نسبی max, عطف, نسبی min (۱۱ نمره)



معادله $0 = 2x^3 + 6x^2 - 3$, دو جواب منفی و یک جواب مثبت دارد. (۵/۲۵)

پاسخ نامه تشریحی

۱. الف $(-1, -2)$ (۵/۲۵) ب $-\frac{4}{\pi}$ (۵/۲۵)

پ $\mathbb{R}$ (۵/۲۵) ت $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ (۵/۲۵)

۲. الف درست (۵/۲۵) ب نادرست (۵/۲۵)

پ درست (۵/۲۵) ت درست (۵/۲۵)

۳. $2^{x+3} - 2^{5x+7} \geq 0 \Rightarrow 2^{x+3} \geq 2^{5x+7} \Rightarrow x+3 \geq 5x+7$ (۵/۲۵)

$\Rightarrow x \leq -1$ (۵/۲۵)

۴. $f(x) = ax^2 - 3 \xrightarrow[\text{ضرب } \frac{1}{3}]{\text{انقباض افقی با}}$ $f(2x) = 4ax^2 - 3$ (۵/۲۵)

$\xrightarrow{\text{یک واحد به راست}} f(2(x-1)) = 4a(x-1)^2 - 3$ (۵/۲۵)

$\xrightarrow[\text{ضرب } 3]{\text{انبساط عمودی با}} 3f(2x-2) = 12a(x-1)^2 - 9$ (۵/۲۵)

$\xrightarrow{\text{۲ واحد به بالا}} 3f(2x-2) + 2 = 12a(x-1)^2 - 7$ (۵/۲۵)

$\Rightarrow g(x) = 12a(x-1)^2 - 7$

$g(-1) = \Delta \Rightarrow 4a - 7 = \Delta \Rightarrow a = \frac{1}{4}$ (۵/۲۵)

۵. $f(x) = \cos \Delta x \cos 2x - \sin \Delta x \sin 2x - 4 = \cos 2x - 4$ (۵/۲۵)

$\max = 1 - 4 = -3$ (۵/۲۵), $\min = -1 - 4 = -5$ (۵/۲۵)

$T = \frac{2\pi}{\gamma}$ (۵/۲۵)

۶. $2 \sin x \cos x = \sqrt{3} \cos^2 x - \sqrt{3} \sin^2 x$ (۵/۲۵)

$\Rightarrow \sin 2x = \sqrt{3} \cos 2x \Rightarrow \tan 2x = \sqrt{3}$ (۵/۲۵)

$2x = k\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \Rightarrow a = \frac{\pi}{6}$ (۵/۲۵)

۷. الف $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x^2 + 3x + 1} - x^2}{-12x + \Delta}$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \times \frac{\sqrt{x^2 + 3x + 1} - x}{-12x + \Delta} \times \frac{\sqrt{x^2 + 3x + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 3x + 1} + x}$ (۵/۲۵)

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \times \frac{3x}{(-12x)(\sqrt{x^2 + 3x + 1})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{-24x^2} = -\frac{1}{8}$ (۵/۲۵)

ب $\lim_{x \rightarrow -\infty} \log_{\frac{1}{3}}(2-x) = -\infty$ (۵/۲۵)

۸. $x = 1$: مخرج ریشه مضاعف $\Rightarrow$ مجانب قائم $x = 1$ (۵/۲۵)

$\text{مخرج} = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 = x^2 + ax + b \Rightarrow a = -2, b = 1$ (۵/۲۵)

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 + 1}{x^2 - 2x + 1} = -1 \Rightarrow$ مجانب افقی $y = -1$ (۵/۲۵)

۹. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)g(x) - 3g(x)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} g(x) \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-3}{x-2}$ (۵/۲۵)

$= \Delta \times f'(2)$ (۵/۲۵)

$x = 2$ شیب خط مماس بر f در $\frac{3-1}{2-0} = \frac{\Delta}{2} = f'(2)$ (۵/۲۵)

$\Rightarrow \Delta f'(2) = \frac{2\Delta}{2}$ (۵/۲۵)