



فصل اول: ماتریس و کاربردها	۷
درس ۱: ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها	۸
درس ۲: وارون ماتریس و دترمینان	۲۰
فصل دوم: آشنایی با مقاطع مخروطی	۴۷
درس ۱: مقاطع مخروطی	۴۸
درس ۲: دایره	۵۴
درس ۳: بیضی و سهمی	۶۸
فصل سوم: بردارها	۸۸
درس ۱: دستگاه مختصات دویعدی	۸۹
درس ۲: ضرب داخلی	۱۰۰
درس ۳: ضرب خارجی	۱۰۹
درس ۴: حجم متوازی‌السطوح	۱۱۷
پاسخ‌نامه تشریحی	۱۲۰
پاسخ‌نامه کلیدی	۱۸۳

۱) ماتریس و اعمال روی ماتریس ها

تعریف هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل تعدادی سطر و ستون، یک ماتریس نامیده می شود. اگر ماتریس A دارای m سطر و n ستون باشد، می نویسیم $A_{m \times n}$ و می گوئیم A ماتریسی از مرتبه $m \times n$ (در n) است. به هر عدد حقیقی واقع در هر ماتریس، درایه آن ماتریس می گوئیم و محل هر درایه را با شماره سطر و ستون آن معلوم می کنیم. به طور مثال درایه واقع در سطر ۲ و ستون ۳ را با $a_{۲۳}$ نمایش می دهیم. به طور کلی درایه واقع در سطر i ام و ستون j ام ماتریس A را با a_{ij} نمایش می دهیم و به اختصار می نویسیم $A = [a_{ij}]$.

نکته در ماتریس $A = [a_{ij}]_{۳ \times ۳}$ ، $a_{ij} = \begin{cases} 2i - mj & i > j \\ i^2 + mj & i \leq j \end{cases}$ اگر $a_{۲۳} = -2$ باشد، مجموع درایه های سطر سوم کدام است؟
 ۱۸ (۱) ۲۱ (۲) ۳۰ (۳) ۳۱ (۴)

پاسخ گزینه «۲» چون در $a_{۲۳}$ ، $i = 2$ و $j = 3$ است، با توجه به این که $i < j$ است، از ضابطه $i^2 + mj$ استفاده می کنیم:

$$i^2 + mj = 2^2 + m(3) = -2 \Rightarrow m = -2 \Rightarrow \begin{cases} a_{۳۱} = 2(3) - (-2)(1) = 8 \\ a_{۳۲} = 2(3) - (-2)(2) = 10 \\ a_{۳۳} = 2^2 + (-2)(3) = 3 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ 8 & 10 & 3 \end{bmatrix}$$

مجموع درایه های سطر سوم $= 8 + 10 + 3 = 21$

معرفی چند ماتریس خاص

۱- ماتریس مربعی

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{۳ \times ۳}$$

اگر در ماتریس A ، تعداد سطرها با تعداد ستون ها برابر و مساوی n باشد، A را یک ماتریس مربعی از مرتبه n ($n \times n$) می نامیم.

ماتریس A در مثال فوق یک ماتریس مربعی از مرتبه ۳ است و درایه های مشخص شده را قطر اصلی ماتریس A می نامیم. اگر $i = j$ ، در این صورت درایه a_{ij} روی قطر اصلی قرار می گیرد. قطر دیگر این ماتریس، قطر فرعی نامیده می شود.

۲- ماتریس سطری

$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}_{۳ \times 1}$$

اگر ماتریس A فقط دارای یک سطر باشد، آن را یک ماتریس سطری می نامیم. در واقع مرتبه A ، $1 \times n$ است. $A = [2 \ 3 \ 4]_{1 \times 3}$ اگر ماتریس A فقط دارای یک ستون باشد، آن را یک ماتریس ستونی می نامیم. در واقع مرتبه A ، $m \times 1$ است.

۳- ماتریس ستونی

۴- ماتریس قطری

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

اگر در ماتریس قطری، تمام درایه های روی قطر اصلی آن با هم برابر باشند، آن را ماتریس اسکالر می نامیم.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ماتریس مربعی که تمام درایه های غیر واقع بر قطر اصلی آن صفر باشند. **نتیجه** درایه های روی قطر اصلی می توانند صفر باشند یا نباشند.

۷- ماتریس صفر

۶- ماتریس همانی (واحد)

ماتریسی است که همه درایه های آن صفر باشند، ماتریس صفر را با $\bar{O}$ نشان می دهیم.

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس اسکالری که تمام درایه های روی قطر اصلی آن ۱ باشد را همانی می گوئیم. ماتریس همانی از مرتبه $n \times n$ را با I_n نمایش می دهیم.

نتیجه دو ماتریس خاص دیگر نیز وجود دارد که در کتاب درسی به آن اشاره ای نشده است که در زیر آن ها را معرفی می کنیم:

۹- ماتریس پایین مثلثی

۸- ماتریس بالا مثلثی

ماتریس مربعی که در آن درایه های واقع در زیر قطر اصلی همگی صفر هستند را پایین مثلثی می نامیم.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

اگر $i < j$: $a_{ij} = 0$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

اگر $i > j$: $a_{ij} = 0$



نکته اگر ماتریس $\begin{bmatrix} - & - & - \\ - & 3m+4 & - \\ 2n+4 & - & n \end{bmatrix}$ یک ماتریس اسکالر باشد، $m+n$ برابر است با:

- (۱) -۴ (۲) ۳ (۳) -۲ (۴) -۱

پاسخ گزینه «۱» می‌دانیم که در ماتریس اسکالر عناصر غیر قطر اصلی همگی صفر هستند و عناصر روی قطر اصلی همه با هم برابرند.
 $2n+4=0 \Rightarrow n=-2 \Rightarrow 3m+4=-2 \Rightarrow m=-2 \Rightarrow n+m=-4$

تساوی بین دو ماتریس: دو ماتریس هم‌مرتبه $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ و $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ را مساوی می‌گوییم هرگاه درایه‌های نظیر به نظیر آن‌ها با هم برابر باشند.
 $\forall i, j : a_{ij} = b_{ij} \Leftrightarrow [a_{ij}] = [b_{ij}]$

نکته اگر $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ x & x-y \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} x+2y & 2 \\ z+2 & -1 \end{bmatrix}$ مساوی باشند، $x+y+z$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

پاسخ گزینه «۲» با توجه به تساوی دو ماتریس داریم:
 $\begin{cases} x+2y=5 \\ x-y=-1 \end{cases} \Rightarrow x=1, y=2$, $z+2=x=1 \Rightarrow z=-1$, $x+y+z=2$

جمع یا تفاضل دو ماتریس: ماتریس‌های هم‌مرتبه قابل جمع و یا تفریق هستند و کافی است درایه‌های نظیر به نظیر را با هم جمع و یا تفریق کنیم.

$$[a_{ij}]_{m \times n} \pm [b_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij} \pm b_{ij}]_{m \times n}$$

نکته مجموع درایه‌های سطر دوم مجموع دو ماتریس $[j^2 - j - i^2]_{3 \times 2}$ و $[j + 2i^2]_{3 \times 2}$ کدام است؟

- (۱) ۱۱ (۲) ۱۲ (۳) ۱۳ (۴) ۱۴

پاسخ گزینه «۳» برای محاسبه مجموع دو ماتریس، کافی است ضابطه‌های آن دو را با هم جمع کنیم.
 $C = A + B = (j + 2i^2) + (j^2 - j - i^2) = i^2 + j^2$, $C = [i^2 + j^2]_{3 \times 2} \Rightarrow \begin{cases} c_{21} = 2^2 + 1^2 = 5 \\ c_{22} = 2^2 + 2^2 = 8 \end{cases} \Rightarrow c_{21} + c_{22} = 5 + 8 = 13$

ضرب یک عدد حقیقی در یک ماتریس: برای ضرب یک عدد حقیقی در ماتریس A ، کافی است آن عدد را در تمام درایه‌ها ضرب کنیم.

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}, r \in \mathbb{R} \Rightarrow rA = r[a_{ij}]_{m \times n} = [ra_{ij}]_{m \times n}$$

نکته اگر $A + B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$ و $3A + B = \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 12 & 1 \end{bmatrix}$ ، آن‌گاه کدام گزینه صحیح است؟

- (۱) $A = 2B$ (۲) $A = B - I$ (۳) $A = B + I$ (۴) $2A = B$

پاسخ گزینه «۲» این سؤال مثل حل یک دستگاه دو معادله و دو مجهول است.

$$\left. \begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \\ 3A + B &= \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 12 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{کم می‌کنیم}} 2A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

با جای گذاری این دو ماتریس در گزینه‌ها مشخص است که در رابطه $A = B - I$ صدق می‌کند.

نکته اگر $A = [2i - j]_{m \times n}$ ، $B = [i - 2j]_{m \times n}$ باشد و $3A - 2B = [c_{ij}]_{m \times n}$ و یکی از درایه‌های C عدد ۷ باشد، حداقل تعداد ستون A چه قدر است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

پاسخ گزینه «۲» ابتدا ماتریس C را تشکیل می‌دهیم:

$$3A - 2B = C = [3(2i - j) - 2(i - 2j)] = [4i + j] \quad 4i + j = 7 \Rightarrow i = 1, j = 3$$

ملاحظه می‌کنید که اگر $i \geq 2$ باشد، j باید منفی شود که نادرست است. یعنی تعداد ستون‌ها حداقل ۳ است.

خواص مهم جمع ماتریس ها و ضرب عدد در ماتریس

برای دو ماتریس هم مرتبه A و B و اعداد حقیقی r و s داریم:

- الف** خاصیت جابه جایی: $A + B = B + A$
- ب** خاصیت شرکت پذیری: $A + (B + C) = (A + B) + C$
- پ** خاصیت عضو خنثی برای جمع ماتریس ها: $A + \bar{O} = \bar{O} + A = A$
- ت** خاصیت عضو قرینه: $A + (-A) = (-A) + A = \bar{O}$
- ث** $r(A \pm B) = rA \pm rB$
- ج** $(r \pm s)A = rA \pm sA$
- چ** $A = B \Rightarrow rA = rB$
- ح** $rA = rB, r \neq 0 \Rightarrow A = B$

ضرب ماتریس در ماتریس: ضرب دو ماتریس زمانی قابل تعریف است که تعداد ستون های ماتریس اول با تعداد سطر های ماتریس دوم برابر باشد. اگر $A_{m \times p}$ و $B_{p \times n}$ باشد، در این صورت AB قابل تعریف بوده و حاصل، ماتریسی از مرتبه $m \times n$ می باشد. $A_{m \times p} B_{p \times n} = C_{m \times n}$

برای محاسبه درایه روی سطر i ام و ستون j ام کافی است درایه های سطر i ام A را در درایه های نظیرشان در ستون j ام B ضرب کرده و با هم جمع کنیم.

$$c_{ij} = A \text{ سطر } i \text{ام} \times B \text{ ستون } j \text{ام} = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ip} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{bmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj}$$

نست اگر عبارت $A_{3 \times m} B_{4 \times 3} C_{p \times n} = D_{k \times 5}$ برقرار باشد، $m + n + p + k$ کدام است؟

- ۱۲ (۴) ۱۵ (۳) ۱۱ (۲) ۸ (۱)

پاسخ گزینه «۳» برای این که ضرب قابل تعریف باشد باید تعداد ستون های ماتریس اول با تعداد سطر های ماتریس دوم برابر باشد. از طرفی ماتریس حاصل از ضرب این چند ماتریس، تعداد سطر هایش با تعداد سطر های ماتریس اول و تعداد ستون هایش با تعداد ستون های ماتریس آخر برابر است.

$$\underbrace{A_{3 \times 4}}_{D_{3 \times n}} \underbrace{B_{4 \times 3}}_{D_{p \times 3}} \underbrace{C_{p \times n}}_{D_{k \times 5}} = D_{k \times 5} \Rightarrow m = 4, p = 3, n = 5, k = 3 \Rightarrow m + n + p + k = 15$$

نست اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 5}$ ، $B = [b_{ij}]_{5 \times 3}$ و $AB = C$ باشد، کدام گزینه c_{33} را نمایش می دهد؟

- (۱) $a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + \dots + a_{35}b_{53}$
- (۲) $a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + \dots + a_{35}b_{53}$
- (۳) $a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + \dots + a_{35}b_{53}$
- (۴) $a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + \dots + a_{35}b_{53}$

پاسخ گزینه «۲» باید سطر دوم A را در ستون سوم B ضرب کنیم.

$$c_{33} = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & \dots & a_{35} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ \vdots \\ b_{53} \end{bmatrix} = a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + \dots + a_{35}b_{53}$$

نست اگر $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$ و $A^2 = \begin{bmatrix} 4 & 12 & 13 \\ 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه های A کدام است؟ (a, b و c اعداد طبیعی اند).

- ۱۳ (۴) ۱۲ (۳) ۱۴ (۲) ۶ (۱)

پاسخ گزینه «۴» ابتدا A را در خودش ضرب می کنیم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & 2ab & 2ac + b^2 \\ 0 & a^2 & 2ab \\ 0 & 0 & a^2 \end{bmatrix}$$

با مقایسه با A^2 داده شده در صورت سؤال داریم:

$$\begin{cases} a^2 = 4 \Rightarrow a = 2, 2ab = 12 \Rightarrow b = 3 \\ 2ac + b^2 = 13 \Rightarrow 4c + 9 = 13 \Rightarrow c = 1 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{مجموع درایه ها} = 13$$



نکته اگر $A = [i + j]_{2 \times 3}$ ، $B = [2i - j]_{3 \times 2}$ و $C = 3AB - 4I$ ، c_{22} کدام گزینه است؟

۶۰ (۴)

۶۴ (۳)

۸۰ (۲)

۸۴ (۱)

پاسخ گزینه «۲» ابتدا باید درایه سطر دوم و ستون دوم AB را محاسبه کنیم. برای این کار سطر دوم A را در ستون دوم B ضرب می‌کنیم.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = 28$$

$$c_{22} = 3(28) - 4(1) = 80$$

درایه واقع در سطر دوم و ستون دوم I برابر ۱ است.

خواص عمل ضرب ماتریس‌ها

الف ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ندارد: $AB \neq BA$

ب عضو خنثی برای عمل ضرب ماتریس‌ها: $I_n A_{n \times n} = A_{n \times n} I_n = A$

پ توزیع پذیری: $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$

ت شرکت پذیری: $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$

ث ضرب ماتریس‌ها دارای خاصیت حذف نیست: $A \times B = A \times C \not\Rightarrow B = C$

نکته اگر A یک ماتریس مربعی باشد و داشته باشیم $A^T = I - A$ ، حاصل $(2A + I)(A^T + A - I)$ کدام است؟

$2A$ (۴)

$\bar{O}$ (۳)

A^T (۲)

$2A^T$ (۱)

$$(2A + I)(\underset{I-A}{A^T} + A - I) = (2A + I)(I - A + A - I) = (2A + I)(\bar{O}) = \bar{O}$$

پاسخ گزینه «۳»

نکته به دلیل وجودنداشتن خاصیت جابه‌جایی برای ضرب ماتریس‌ها، اتحادهای جبری برقرار نیستند.

مثال اگر A و B دو ماتریس مربعی هم‌رتبه باشند، طرف دوم عبارتهای زیر را بنویسید.

الف) $(A + B)^T =$

ب) $(A - B)(A + B) =$

پ) $(AB)^T =$

الف $(A + B)^T = (A + B)(A + B) = A^T + AB + BA + B^T$

ب $(A - B)(A + B) = A^T + AB - BA - B^T$

پ $(AB)^T = ABAB$

نکته اگر $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، $B^T = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$ و $A + B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $AB + BA$ کدام است؟

$\begin{bmatrix} -2 & 12 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ (۴)

$\begin{bmatrix} 2 & 12 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ (۳)

$\begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ (۲)

$\begin{bmatrix} -9 & 1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$ (۱)

$(A + B)^T = (A + B)(A + B) = A^T + AB + BA + B^T$

پاسخ گزینه «۳» ابتدا $A + B$ را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} + AB + BA, \quad \begin{bmatrix} 4 & 25 \\ -5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 13 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} + AB + BA \Rightarrow AB + BA = \begin{bmatrix} 2 & 12 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

نکته اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & -4 \\ 0 & -3 & 6 \end{bmatrix}$ ، مجموع درایه‌های $A^T + AB + BA + B^T$ برابر است با:

۲۰۱ (۴)

۲۱ (۳)

۱۰۸ (۲)

۱۸ (۱)

پاسخ گزینه «۲» می‌دانیم $(A + B)^T = A^T + AB + BA + B^T$ است، پس:

$$(A + B)^T = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = (6I)^T = 36I = \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 0 \\ 0 & 0 & 36 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها} = 3 \times 36 = 108$$

مانتریس های تعویض پذیر

دو ماتریس مربعی هم مرتبه A و B را تعویض پذیر گوئیم هرگاه $AB = BA$ باشد.

نکته اگر دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ x & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -x & 3 \\ -1 & y \end{bmatrix}$ تعویض پذیر باشند، $x + y$ برابر است با:

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

پاسخ گزینه «۳» ابتدا AB و BA را تشکیل داده و سپس با هم مساوی قرار می دهیم:

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ x & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x & 3 \\ -1 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x+3 & 6-3y \\ -x^2+1 & 3x-y \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} -x & 3 \\ -1 & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ x & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 3x-3 \\ -2+xy & 3-y \end{bmatrix}$$

$$AB = BA \Rightarrow \begin{cases} -2x+3 = x \Rightarrow x=1 \\ 6-3y = 3x-3 \Rightarrow y=2 \end{cases} \Rightarrow x+y=3$$

نکته اگر دو ماتریس A و B تعویض پذیر باشند، اتحادهای جبری نیز برقرار می شوند و بالعکس.

نکته ماتریس های $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ با هم نوع خود یعنی $\begin{bmatrix} c & d \\ d & c \end{bmatrix}$ و ماتریس های $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ با هم نوع خود یعنی $\begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix}$ تعویض پذیرند.

نکته اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$ با ماتریس $B = \begin{bmatrix} a & b \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$ تعویض پذیر باشد، $a + b$ کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۷ (۳) ۱۱ (۴) ۵

پاسخ گزینه «۱» ماتریس $\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$ با هم نوع خود تعویض پذیر است. یعنی در ماتریس B باید درایه های روی قطر اصلی برابر و درایه های روی قطر فرعی قرینه باشند.

نکته اگر S ماتریس اسکالر با درایه های قطری a و A ماتریسی هم مرتبه با آن باشد، $AS = SA = aA$ در نتیجه هر ماتریس با ماتریس اسکالر تعویض پذیر است.

نکته اگر ماتریس قطری با ماتریسی غیرقطری تعویض پذیر باشد، حتماً باید اسکالر باشد.

نکته اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} x+2 & 0 & 0 \\ 0 & 2x-3 & 0 \\ 0 & 0 & y-1 \end{bmatrix}$ با ماتریس غیرقطری B تعویض پذیر باشد، حاصل $x + y$ کدام است؟

- (۱) ۷ (۲) ۹ (۳) ۱۳ (۴) ۱۲

پاسخ گزینه «۳» در نکته قبل گفته شد که اگر ماتریس قطری با ماتریسی غیرقطری تعویض پذیر باشد، حتماً باید اسکالر باشد، یعنی عناصر روی قطر اصلی آن برابر باشد.

نکته اگر ماتریس 2×2 باشد و $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ باشد و x مجموع عناصر روی قطر اصلی A و y مجموع درایه های ستون دوم A باشد، کدام رابطه برقرار است؟

- (۱) $x = y$ (۲) $x = 2y$ (۳) $3x = y$ (۴) $x = -y$

پاسخ گزینه «۲» ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ را در نظر می گیریم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ 3a+c & 3b+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+3b & b \\ c+3d & d \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = a+3b \Rightarrow b=0 \\ 3a+c = c+3d \Rightarrow a=d \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & a \end{bmatrix}$$

$y = a$: مجموع درایه های ستون ۲ و $x = 2a$: مجموع درایه های روی قطر اصلی



بهتر است قضیه زیر را که به قضیه کیلی - همیلتون معروف است بدانید:

در ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ داریم: $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I = \bar{O}$

نتیجه دترمینان ماتریس 2×2 ، $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ به صورت $ad-bc$ محاسبه می‌شود و آن را با $|A|$ نشان می‌دهند.

اثر ماتریس A یا $\text{trace}(A)$ برابر است با مجموع عناصر روی قطر اصلی.

با توجه به مطالب بالا، قضیه کیلی - همیلتون به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$A^2 - (\text{trace}(A))A + |A|I = \bar{O}$$

نکته اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ و $A^2 = \alpha A + \beta I$ باشد، حاصل $2\alpha + \beta$ کدام است؟

۱۰ (۱) ۹ (۲) ۸ (۳) ۱۲ (۴)

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix}$$

پاسخ گزینه «۴» روش اول: در این روش، عبارت داده‌شده را می‌سازیم:

$$\begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha + \beta & 2\alpha \\ 3\alpha & 4\alpha + \beta \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 7 \\ 2\alpha = 10 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 5 \text{ و } \beta = 2, \quad 2\alpha + \beta = 2(5) + 2 = 12$$

روش دوم: با توجه به قضیه کیلی - همیلتون داریم:

$$A^2 - (1+4)A + (4(1) - 3(2))I = \bar{O} \Rightarrow A^2 - 5A - 2I = \bar{O} \Rightarrow A^2 = 5A + 2I \Rightarrow \alpha = 5 \text{ و } \beta = 2 \Rightarrow 2\alpha + \beta = 12$$

نکته اگر $A^2 - 3A = -2I$ و $A^2 = \begin{bmatrix} 10 & -6 \\ 9 & -5 \end{bmatrix}$ باشد، A کدام گزینه است؟

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} (۴) \quad \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} (۳) \quad \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} (۲) \quad \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} (۱)$$

$$A^2 - 3A + 2I = \bar{O} \Rightarrow \begin{cases} a+d=3 \\ ad-bc=2 \end{cases}$$

پاسخ گزینه «۳» اگر فرض کنیم $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ باشد، با توجه به قضیه کیلی - همیلتون داریم:

که تنها درایه‌های ماتریس $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ در این عبارت صدق می‌کند.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a+b & 1 \end{bmatrix}$$

نکته

نکته حاصل $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 10 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ برابر است با:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 27 & 1 \end{bmatrix} (۴) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 36 & 1 \end{bmatrix} (۳) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 55 & 1 \end{bmatrix} (۲) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 45 & 1 \end{bmatrix} (۱)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 10 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1+2+\dots+10 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 55 & 1 \end{bmatrix}$$

پاسخ گزینه «۲» با توجه به نکته گفته‌شده داریم:

نکته اگر A و B دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه باشند، مجموع درایه‌های روی قطر اصلی AB با مجموع درایه‌های روی قطر اصلی BA برابر است. $\text{trace}(AB) = \text{trace}(BA)$

نکته اگر $AB = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 11 \end{bmatrix}$ باشد، BA کدام گزینه می‌تواند باشد؟

$$\begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} (۴) \quad \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} (۳) \quad \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 10 & 5 \end{bmatrix} (۲) \quad \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} (۱)$$

پاسخ گزینه «۲» با توجه به نکته مطرح‌شده در بالا، تنها گزینه‌ای که مجموع درایه‌های روی قطر اصلی آن با مجموع درایه‌های روی قطر اصلی AB برابر است، می‌باشد.

توان ماتریس: توان فقط برای ماتریس‌های مربعی تعریف می‌شود و داریم:

$$A^2 = A \times A, \quad A^3 = A \times A \times A = A^2 \times A = A \times A^2, \quad A^n = A^{n-1} \times A = A \times A^{n-1}$$

در محاسبه توان‌های بزرگ یک ماتریس، ابتدا چند توان اولیه از آن را محاسبه می‌کنیم و به یکی از حالات زیر خواهیم رسید:

۱ به الگوی خاصی

۲ به ضربی از ماتریس I

۳ به ضربی از ماتریس داده‌شده

نست اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های A^n کدام است؟

۲n - ۴ (۴)

۳n - ۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

پاسخ گزینه ۱ ابتدا چند توان اول A را محاسبه می‌کنیم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^n = \begin{bmatrix} n+1 & -n \\ n & -n+1 \end{bmatrix}$$

A^n مجموع درایه‌های = ۲

نست اگر $A^3 = 4I$ باشد، A^{20} کدام است؟

$4^5 A^2$ (۴)

$4^6 A^2$ (۳)

$4^7 A$ (۲)

$4^6 A$ (۱)

پاسخ گزینه ۳ از روی عبارت داده‌شده، A^{20} را می‌سازیم:

$A^{20} = (A^3)^6 \times A^2 = (4I)^6 A^2 = 4^6 A^2$

نست اگر $A^2 - A + I = \bar{O}$ باشد، حاصل A^{21} کدام است؟

-I (۴)

$(-2)^5 I$ (۳)

$2^5 I$ (۲)

$-2^5 I$ (۱)

پاسخ گزینه ۴ ابتدا چند توان اول A را بررسی می‌کنیم:

$A^2 = A - I \Rightarrow A^3 = A(A^2) = A(A - I) = A^2 - A \Rightarrow A^3 = (A - I) - A = -I$

$(A^3)^7 = (-I)^7 \Rightarrow A^{21} = (-1)^7 I = -I$

حال A^{21} را می‌سازیم:

نست اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 7 & -3 \end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه A^{45} چند برابر A است؟

$2^{44} A$ (۴)

$2^{33} A$ (۳)

$2^{22} A$ (۲)

$2^{11} A$ (۱)

پاسخ گزینه ۲ ابتدا چند توان از A را بررسی می‌کنیم:

$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 7 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 7 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2I$

$A^{45} = (A^2)^{22} \times A = (2I)^{22} A = 2^{22} A$

حال از روی $A^2 = 2I$ توان ۴۵ را می‌سازیم:

نست اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های A^{50} برابر است با:

2×4^{50} (۲)

4^{50} (۱)

2×4^{49} (۴)

4^{49} (۳)

پاسخ گزینه ۲ ابتدا چند توان از A را بررسی می‌کنیم:

$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{bmatrix} = 4A, \quad A^2 = 4A \Rightarrow A^3 = 4A^2 = 4(4A) = 4^2 A$

$A^4 = 4^2 A^2 = 4^2 A \Rightarrow A^{50} = 4^{49} A, \quad A^{50}$ مجموع درایه‌های = $8 \times 4^{49} = 2 \times 4^{50}$



نکته اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $(2A^T + 4A - I)(A^T + A + I)$ کدام است؟

(۴) $5A^T + 3A - I$

(۳) $3A - I$

(۲) $5A^T - I$

(۱) $5A^T$

پاسخ گزینه «۴» ابتدا توان‌های A را بررسی می‌کنیم:

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{O} \Rightarrow A^n = \bar{O} \quad (n \geq 3)$$

$$(2A^T + 4A - I)(A^T + A + I) = \underbrace{2A^T}_{\bar{O}} + \underbrace{2A^T}_{\bar{O}} + 2A^T + \underbrace{4A}_{\bar{O}} + 4A - A^T - A - I = 5A^T + 3A - I$$

نکته A و B دو ماتریس مربعی و $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ و داریم $B^{\Delta^0} A = AB^{23}$ ، ماتریس A کدام گزینه می‌تواند باشد؟

(۴) $\begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 5 & -6 \end{bmatrix}$

(۳) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$

(۲) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$

(۱) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

پاسخ گزینه «۲» ابتدا توان‌های B را بررسی می‌کنیم:

$$B^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \Rightarrow B^T = BB^T = BI = B \Rightarrow B^{\Delta^0} = I, \quad B^{23} = B$$

$$B^{\Delta^0} A = AB^{23} \Rightarrow IA = AB \Rightarrow A = AB$$

در نتیجه توان‌های زوج B برابر I و توان‌های فرد B برابر B می‌شود.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & a \\ d & c \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = b \\ c = d \end{cases}$$

فرض کنیم $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ داریم:

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}$ آن‌گاه در مورد ماتریس $2A + B$ چه می‌توان گفت؟

(۲) مجموع درایه‌های آن ۴ است.

(۱) ماتریس همانی است.

(۴) ماتریس صفر است.

(۳) مجموع درایه‌های آن از $A + B$ کم‌تر است.

۲- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & m \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ باشد و مجموع این دو ماتریس $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 8 \\ n & 1 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه $2m + n$ کدام است؟

(۴) ۱۲

(۳) ۹

(۲) ۱۱

(۱) ۱۰

۳- اگر $A = [i^T - j]_{3 \times 3}$ ، $B = [j^T + i + 1]_{3 \times 3}$ و $C = A - B$ باشد، آن‌گاه تفاضل مجموع درایه‌های قطر اصلی و مجموع درایه‌های قطر فرعی C کدام است؟

(۴) ۱

(۳) -۲

(۲) ۲

(۱) صفر

۴- اگر A و B ماتریس‌هایی 2×2 باشند و داشته باشیم $5A + B = I$ و $B - 2A = \begin{bmatrix} -6 & -14 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$ درایه واقع در سطر دوم و ستون اول $2A + 3B$ کدام است؟

(۴) ۱۳

(۳) ۱۵

(۲) ۱۹

(۱) ۱۷

۵- اگر ماتریس $A = [a_{ij}]$ از مرتبه $3 \times (k-1)$ یک ماتریس مربعی باشد و داشته باشیم $a_{ij} = kij$ ، حاصل $\sum_{i=1}^{k-1} a_{ii}$ چه قدر است؟

(۴) ۶۴

(۳) ۳۶

(۲) ۴۸

(۱) ۵۶

۶- اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ آن گاه با کدام یک از تعاریف زیر، ماتریس A بالامثلثی است؟ (عناصر زیر قطر اصلی آن صفر است).

$$a_{ij} = \begin{cases} \left[\frac{i-j}{3} \right] & i > j \\ i+j & i \leq j \end{cases} \quad (۴) \quad a_{ij} = \begin{cases} \left[\frac{i+j}{3} \right] - 1 & i > j \\ i-j & i \leq j \end{cases} \quad (۳) \quad a_{ij} = \begin{cases} \left[\frac{i+j}{2} \right] & i > j \\ i+j & i \leq j \end{cases} \quad (۲) \quad a_{ij} = \begin{cases} \left[\frac{i+j}{2} \right] - 2 & i > j \\ i-j & i \leq j \end{cases} \quad (۱)$$

۷- اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ و $a_{ij} = \begin{cases} 0 & i > j \\ j-i+2 & i = j \\ \left[\frac{i+j}{5} \right] & i < j \end{cases}$ باشد، کدام گزینه در مورد ماتریس A درست است؟

(۱) قطری (۲) همانی (۳) پایین مثلثی (۴) بالامثلثی

۸- اگر $A = [-2i + 3j]_{3 \times 4}$ باشد، حاصل عبارت $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=2}^4 a_{ij}$ کدام است؟

(۱) ۱۸ (۲) ۱۶ (۳) ۱۲ (۴) ۲۰

۹- در ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ اگر $a_{ij} = \begin{cases} i-j & i > j \\ -2i + 2j & i = j \\ -j^3 & i < j \end{cases}$ باشد، مجموع درایه‌های بالای قطر اصلی چه قدر است؟

(۱) ۸ (۲) -۲۷ (۳) -۱۰ (۴) -۶۲

۱۰- تفاضل مجموع درایه‌های ماتریس $[i^2 - 2ij]_{3 \times 2}$ و مجموع درایه‌های ماتریس $[i^2 - 2ij]_{2 \times 2}$ چند است؟

(۱) -۲ (۲) -۱ (۳) صفر (۴) ۱

۱۱- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، $A \times B - B \times A$ کدام است؟

$$(۱) \begin{bmatrix} -8 & -8 \\ 12 & 8 \end{bmatrix} \quad (۲) \begin{bmatrix} 8 & -8 \\ -12 & 8 \end{bmatrix} \quad (۳) \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ -12 & -8 \end{bmatrix} \quad (۴) \begin{bmatrix} -8 & 8 \\ 12 & -8 \end{bmatrix}$$

۱۲- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ باشد، درایه واقع در سطر دوم و ستون اول $B \times A$ کدام است؟

(۱) ۱۰ (۲) -۲ (۳) ۷ (۴) ۴

۱۳- اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های سطر اول $A \times B$ کدام است؟

(۱) ۷ (۲) ۲۱ (۳) ۱۹ (۴) -۵

۱۴- اگر $A = \begin{bmatrix} x & 1-x & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & -5 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2x & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، AB برابر ۱۴ باشد، x کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۱۲ (۳) ۳ (۴) ۱۴

۱۵- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ m & 0 \end{bmatrix}$ و $A^2 = \begin{bmatrix} n & a_{12} \\ 3 & a_{22} \end{bmatrix}$ باشد، m^n کدام است؟

(۱) ۹ (۲) ۸۱ (۳) $-\frac{1}{9}$ (۴) $\frac{1}{9}$

۱۶- اگر A, B, C ماتریس‌های 2×2 ، $CB = 2I$ و $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل عبارت $(AB + 2B)(CA + C)$ کدام است؟

$$(۱) \begin{bmatrix} 10 & 14 \\ 14 & 10 \end{bmatrix} \quad (۲) \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \quad (۳) \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \quad (۴) \begin{bmatrix} 14 & 10 \\ 10 & 14 \end{bmatrix}$$



۱۷- اگر A, B و C سه ماتریس مربعی هم مرتبه باشند، به طوری که $A + C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ، ساده شده $BC^T + BAC$ برابر با کدام ماتریس است؟

- (۱) $3BC$ (۲) $3AC$ (۳) $3BA$ (۴) $3CB$

۱۸- مجموع درایه های ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 20 & 1 \end{bmatrix}$ کدام است؟

- (۱) ۲۱۰ (۲) ۲۱۱ (۳) ۲۱۲ (۴) ۲۱۴

۱۹- اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ ، $A^T = \alpha A + \beta I$ ، دو تایی (α, β) کدام است؟

- (۱) $(2, 1)$ (۲) $(2, 13)$ (۳) $(4, 11)$ (۴) $(4, 13)$

۲۰- چند ماتریس مانند $A_{2 \times 2}$ وجود دارد که $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = A \times \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ باشد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) بی شمار (۴) ۲

۲۱- اگر $A \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ باشد و درایه های ماتریس A اعداد طبیعی باشند، کمترین مقدار مجموع درایه های ستون اول منهای مجموع درایه های ستون دوم ماتریس A کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) ۲

۲۲- اگر $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ b & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ باشد و درایه سطر اول و ستون سوم A^T برابر با ۲- و مجموع درایه های قطر و زیر قطر اصلی ماتریس A برابر $\frac{9}{4}$ باشد، مقدار براکت $a + b$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) -۳ (۴) -۲

۲۳- از رابطه ماتریس $\begin{bmatrix} 16 & 7 \\ 12 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & x-1 \\ 2 & x-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & x-1 \\ x & x+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ مقدار x کدام می تواند باشد؟

- (۱) ۶ (۲) ۴ (۳) ۲ (۴) -۲

۲۴- اگر A ماتریسی سطری با k ستون و B ماتریسی ستونی با $3 - 2k$ سطر باشد، در مورد $A \times B$ چه می توان گفت؟

- (۱) ماتریس AB از مرتبه ۳ می باشد. (۲) ماتریس AB از مرتبه ۱ می باشد. (۳) اگر $k = 3$ باشد، مرتبه AB ، ۱ است. (۴) چنین ضربی با هیچ مقداری از k امکان پذیر نیست.

۲۵- دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & n & -1 \\ 4 & m & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -2 \\ n & 5 \end{bmatrix}$ مفروض اند. ماتریس AB بالامثلثی می باشد؛ مقدار m کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) -۲

۲۶- اگر $A = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ a & c & b^T \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & c & -1 \\ a+b & a & 2+a \\ 1 & b & 3 \end{bmatrix}$ باشند و A ماتریس پایین مثلثی بوده و درایه واقع در سطر دوم و ستون سوم BA برابر ۳ باشد، a کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۵ (۴) -۵

۲۷- اگر $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ و $AB = B + I$ باشد، ماتریس $4A$ کدام است؟

- (۱) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

۲۸- اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $(A^T - AB - 2B)^4$ کدام است؟

- (۱) $128I$ (۲) $512I$ (۳) $256I$ (۴) $64I$

$(A - B)^T + (A - B)B$

A (۴)

AB (۳)

$A - BA$ (۲)

$A - AB$ (۱)

۲۹- اگر ماتریس A به گونه‌ای باشد که $A^T = A$ باشد، آن گاه حاصل عبارت روبه‌رو کدام است؟

۳۰- اگر $A^T = I$ ، آن گاه $(A^T - A)^T - (A^T + A)^T$ کدام است؟

$5A + 3I$ (۴)

$6A + 2I$ (۳)

$4A^T + 4I$ (۲)

$5A - I$ (۱)

۳۱- در معادله $\bar{O} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x & 2 & 1 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x \\ x \end{bmatrix}$ مجموع عکس ریشه‌ها کدام است؟

$-\frac{2}{15}$ (۴)

$-\frac{15}{2}$ (۳)

$\frac{2}{15}$ (۲)

$\frac{15}{2}$ (۱)

۳۲- اگر یکی از جواب‌های معادله $\bar{O} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x \\ x \end{bmatrix}$ باشد، آن گاه جواب دیگر کدام است؟

$-\frac{9}{2}$ (۴)

$-\frac{7}{2}$ (۳)

$-\frac{5}{2}$ (۲)

$-\frac{3}{2}$ (۱)

۳۳- اگر مجموع درایه‌های ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b & b \\ a & b & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ یک چهارم مجموع درایه‌های ماتریس A^T باشد، با فرض $a + 2b = 1$ مقدار a کدام است؟

8 (۴)

$1 \pm \sqrt{2}$ (۳)

7 (۲)

$-1 \pm \sqrt{2}$ (۱)

۳۴- اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ باشد، کدام گزینه زیر صحیح است؟

$ABC = ACB$ (۴)

$AB = BA$ (۳)

$(A + B)C = C(A + B)$ (۲)

$C(A - B) = (A - B)C$ (۱)

۳۵- اگر A و B ماتریس‌هایی از مرتبه ۲ باشند، $AB - BA$ برابر کدام می‌تواند باشد؟

$\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ (۴)

$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ (۳)

$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ (۲)

$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ (۱)

۳۶- اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ ، $B = [b_{ij}]_{3 \times 3}$ ، $a_{ij} = \begin{cases} i + j & i < j \\ i^2 & i = j \\ \frac{i+j}{6} & i > j \end{cases}$ باشد، مجموع مجذور درایه‌های قطر اصلی AB کدام است؟

25 (۴)

114 (۳)

98 (۲)

14 (۱)

۳۷- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $A^{1397} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، آن گاه $a + b + c + d$ کدام است؟

1399 (۴)

1398 (۳)

1396 (۲)

1397 (۱)

۳۸- اگر $A = [i]_{3 \times 3}$ ، $A^0 = x^y A$ و x و y اعداد حقیقی باشند، $x + y$ کدام است؟

19 (۴)

17 (۳)

15 (۲)

14 (۱)

۳۹- اگر A ماتریس مربعی بوده و $A^T - A + I = \bar{O}$ باشد، ماتریس A^{97} برابر کدام است؟

$-A$ (۴)

A (۳)

$I - A$ (۲)

$A - I$ (۱)

۴۰- در ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ حاصل $A^n - A^{n-1}$ کدام است؟

$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (۴)

$\begin{bmatrix} 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (۳)

$\begin{bmatrix} 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (۲)

$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (۱)



۴۱- اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ ، آنگاه A^{15} کدام است؟

- (۱) A (۲) I (۳) $-A$ (۴) $-I$

۴۲- اگر $2A^2 = A$ ، آنگاه ماتریس A^{100} کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2^{101}} A$ (۲) $\frac{1}{2^{100}} A^{99}$ (۳) $\frac{1}{2^{99}} A$ (۴) $\frac{1}{2^{99}} A^{99}$

۴۳- اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، حاصل $A^{20} - A^{19}$ کدام است؟

- (۱) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (۴) $\bar{O}$

۴۴- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های ماتریس $A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5$ کدام است؟

- (۱) 10 (۲) 20 (۳) 5 (۴) 2

۴۵- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ در ماتریس A^{100} حاصل جمع درایه‌های بالای قطر اصلی کدام است؟

- (۱) 2^{99} (۲) 2^{100} (۳) 200 (۴) 203

۴۶- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های قطر اصلی A^5 چه قدر است؟

- (۱) 243 (۲) 245 (۳) 311 (۴) 83

۴۷- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ است. اگر مجموع درایه‌های A^n ، 729 باشد، n کدام است؟

- (۱) 6 (۲) 9 (۳) 7 (۴) 8

۴۸- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 24 \\ 1 & 1 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 4 \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ باشند، مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس C^2 کدام است؟

- (۱) 16 (۲) 18 (۳) 20 (۴) 4

۴۹- اگر $A^2 = A$ بوده و $(A - I)^5 = mA + nI$ باشد، آنگاه حاصل $m + n$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) 2 (۳) -2 (۴) 3

۵۰- A و I دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه‌اند. با فرض $A^2 = A$ و $A^5 + 2A = I$ ، حاصل ماتریس $(3A - 2I)^4$ کدام است؟

- (۱) I (۲) A (۳) $-A$ (۴) $\bar{O}$

۵۱- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل جمع درایه‌های سطر اول ماتریس A^6 کدام است؟

- (۱) 37 (۲) 39 (۳) $2 \times 3^6 + 1$ (۴) $2 \times 3^5 + 1$

۵۲- اگر A ماتریسی مربعی باشد، به طوری که $A^3 = \bar{O}$ ؛ حاصل $A(A - 2I)^3$ کدام است؟

- (۱) $16A - 4A^2$ (۲) $16A - 32A^2$ (۳) $12A^2 - 8A$ (۴) $6A^2 - 8A$



هندسه ۳ نردبام - فصل اول

۵۳- اگر A و B ماتریس‌های مربعی هم‌مرتبه باشند و $AB - B^T A = \bar{O}$ و $(B^T + I)(B^T - I) = \bar{O}$ ماتریس AB^T کدام است؟
I (۱) A (۲) B (۳) $\bar{O}$ (۴)

۵۴- اگر $BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ و ماتریس‌های A و B مربعی باشند، مجموع درایه‌های $B(AB)^9 A$ کدام است؟
۲ × ۳^۹ (۱) ۳ × ۲^۹ (۲) ۲ × ۳^{۱۰} (۳) ۳ × ۲^{۱۰} (۴)

medabook.com



پاسخنامه تشریحی

۶- گزینه ۳: ماتریس بالامثلثی ماتریسی است که عناصر زیر

قطر اصلی آن همگی صفرند.

درایه $a_{۳۳}$ را در گزینه‌ها بررسی می‌کنیم:

۱ $a_{۳۳} = \left[\frac{۳+۲}{۲} \right] - ۲ = ۰ \quad \checkmark$

۲ $a_{۳۳} = \left[\frac{۳+۲}{۲} \right] = ۲ \quad \times$

۳ $a_{۳۳} = \left[\frac{۳+۲}{۳} \right] - ۱ = ۰ \quad \checkmark$

۴ $a_{۳۳} = \left[\frac{۳-۴}{۳} \right] = -۱ \quad \times$

حال در ۱ و ۳ درایه $a_{۳۱}$ را نیز بررسی می‌کنیم:

۱ $\left[\frac{۲+۱}{۲} \right] - ۲ = -۱ \quad \times$

۳ $\left[\frac{۲+۱}{۳} \right] - ۱ = ۰ \quad \checkmark$

بنابراین پاسخ ۳ است.

۷- گزینه ۴: ماتریس A را تشکیل می‌دهیم:

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس A بالامثلثی است.

۸- گزینه ۱: ابتدا سیگمای داده‌شده را باز می‌کنیم:

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=2}^3 a_{ij} = a_{۱۲} + a_{۱۳} + a_{۲۲} + a_{۲۳} = ۴ + ۷ + ۲ + ۵ = ۱۸$$

۹- گزینه ۲: در عناصر بالای قطر اصلی

$$\begin{bmatrix} \bigcirc & -۸ & -۲۷ \\ \bigcirc & \bigcirc & -۲۷ \\ \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \end{bmatrix}$$

حال درایه‌های بالای قطر اصلی را

تشکیل می‌دهیم.

$$-۸ + (-۲۷) + (-۲۷) = -۶۲$$

۱۰- گزینه ۳: ابتدا دو ماتریس را تشکیل می‌دهیم:

$$A = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ -۳ & -۴ \end{bmatrix} \Rightarrow \text{مجموع درایه‌های } A = -۱ - ۳ - ۴ = -۸$$

$$B = \begin{bmatrix} -۱ & -۳ \\ ۰ & -۴ \end{bmatrix} \Rightarrow \text{مجموع درایه‌های } B = -۱ - ۳ - ۴ = -۸$$

اختلاف این دو مجموع برابر صفر است.

۱۱- گزینه ۳: ابتدا $A \times B$ و $B \times A$ را محاسبه می‌کنیم.

$$A \times B = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -۱ & -۲ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ -۲ & -۳ \end{bmatrix}$$

$$B \times A = \begin{bmatrix} -۱ & -۲ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۷ & -۴ \\ ۱۰ & ۵ \end{bmatrix}$$

$$A \times B - B \times A = \begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ -۲ & -۳ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -۷ & -۴ \\ ۱۰ & ۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۸ & ۸ \\ -۱۲ & -۸ \end{bmatrix}$$

۱- گزینه ۱: ابتدا ماتریس $۲A + B$ را تشکیل می‌دهیم.

$$۲A + B = ۲ \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ -۴ & -۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

ماتریس حاصل یک ماتریس همانی است.

۲- گزینه ۲: با جمع دو ماتریس A و B و مساوی قرار دادن آن

با ماتریس C به روابط زیر می‌رسیم.

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ -۱ & ۰ & ۴ \\ ۲ & -۱ & ۳ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & m \\ ۲ & ۱ & ۴ \\ ۳ & ۲ & -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۱ & ۸ \\ n & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۱+m \\ ۱ & ۱ & ۸ \\ ۵ & ۱ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۱ & ۸ \\ n & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۱+m=۴ \Rightarrow m=۳ \\ n=۵ \end{cases} \Rightarrow ۲m+n=۲(۳)+۵=۱۱$$

۳- گزینه ۱: با توجه به ضابطه‌های A و B، ضابطه ماتریس C

به صورت زیر است:

$$C = A - B = [i^2 - j - j^2 - i - 1] = [i^2 - i - (j^2 + j) - 1]$$

حال عناصر روی قطر اصلی و فرعی را می‌سازیم:

$$C = \begin{bmatrix} -۳ & & -۱۳ \\ & -۵ & \\ ۳ & & -۷ \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های روی قطر فرعی - مجموع درایه‌های روی قطر اصلی

$$= (-۳ - ۵ - ۷) - (-۱۳ - ۵ + ۳) = ۰$$

۴- گزینه ۲: با حل دستگاه زیر ماتریس‌های A و B به دست

می‌آید.

$$\begin{cases} ۵A + B = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \\ -۲A + B = \begin{bmatrix} -۶ & -۱۴ \\ ۷ & ۱ \end{bmatrix} \end{cases} \xrightarrow{\text{کم کنیم}} ۷A = \begin{bmatrix} ۷ & ۱۴ \\ -۷ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} -۴ & -۱۰ \\ ۵ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$۲A + ۳B = \begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ -۲ & ۰ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۱۲ & -۳۰ \\ ۱۵ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱۰ & -۲۶ \\ ۱۳ & ۳ \end{bmatrix}$$

عنصر واقع در سطر دوم و ستون اول ۱۳ می‌باشد.

۵- گزینه ۱: چون ماتریس A مربعی است بنابراین باید تعداد

سطر و ستون آن برابر باشد.

$$k - ۱ = ۳ \Rightarrow k = ۴$$

حال با توجه به ضابطه داده‌شده، عناصر روی قطر اصلی را می‌سازیم:

$$A = [k \times i \times j] = [4ij] \Rightarrow a_{۱۱} = ۴, a_{۲۲} = ۱۶, a_{۳۳} = ۳۶$$

$$a_{۱۱} + a_{۲۲} + a_{۳۳} = ۵۶$$



۱۷- گزینه ۱ $BAC + BC^T = 3I$ است. حال از دو طرف $A + C = 3I$

از B و C فاکتور می‌گیریم:

$$BAC + BC^T = B(\underbrace{A+C}_{3I})C = B(3I)C = 3BC$$

۱۸- گزینه ۳ با توجه به رابطه زیر می‌توانیم تست را حل کنیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a+b & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 20 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1+2+3+\dots+20 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{20(21)}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 210 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها} = 212$$

۱۹- گزینه ۲ اول A^T را محاسبه می‌کنیم و سپس در رابطه

داده شده جای گذاری می‌کنیم:

$$A^T = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 10 & 21 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \alpha A + \beta I \Rightarrow \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 10 & 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\alpha & \alpha \\ 5\alpha & 4\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2\alpha + \beta = 9 \\ \alpha = 2 \end{cases} \Rightarrow \beta = 13 \Rightarrow (\alpha, \beta) = (2, 13)$$

۲۰- گزینه ۱ فرض می‌کنیم $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ باشد.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3a & 2a \\ 3c & 2c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3c = 6 \Rightarrow c = 2 \\ 2c = 3 \Rightarrow c = \frac{3}{2} \end{cases}$$

که این تناقض است پس ماتریس A وجود ندارد.

۲۱- گزینه ۲ فرض می‌کنیم $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ باشد، عبارت

داده شده را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2a+b & 2a \\ 2c+d & 2c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a+2c & 2b+2d \\ a & b \end{bmatrix}$$

حالا درایه‌های متناظر را مساوی می‌گذاریم:

$$\begin{cases} 2a+b = 2a+2c \Rightarrow b = 2c \\ 2a = 2b+2d \Rightarrow a = b+d \end{cases}$$

$$(a+c) - \overbrace{(b+d)}^a = c$$

که کمترین مقدار طبیعی C برابر ۱ است.

۱۲- گزینه ۴ برای محاسبه درایه واقع در سطر دوم و ستون اول

$B \times A$ کافی است سطر دوم ماتریس B را در ستون اول ماتریس A

ضرب کنیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 1+0+3=4$$

۱۳- گزینه ۲ برای محاسبه درایه‌های سطر اول $A \times B$ کافی

است سطر اول ماتریس A را در کل ماتریس B ضرب کنیم:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 13 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها} = 7+13+1=21$$

۱۴- گزینه ۳ چون مجموع درایه‌های ستون دوم AB داده شده،

کافی است کل A را در ستون دوم B ضرب کنیم:

$$\begin{bmatrix} x & 1-x & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+4 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$\text{مجموع درایه‌ها} = x+4+2-6=14 \Rightarrow x=14$$

۱۵- گزینه ۲ اول A^T را محاسبه می‌کنیم:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ m & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-m & -1 \\ m & -m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1-m & -1 \\ m & -m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & a_{12} \\ 3 & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 1-m=n \\ m=3 \end{cases} \Rightarrow n=-2$$

$$m^n = 3^{-2} = \frac{1}{9}$$

۱۶- گزینه ۴ نکته فرض می‌کنیم B و C دو ماتریس مربعی

هم‌مرتبه باشند، اگر $BC = \lambda I$ باشد آن‌گاه CB نیز برابر λI است.

ابتدا از B در پرانتز اول و C در پرانتز دوم فاکتور می‌گیریم:

$$(AB + 2B)(CA + C) = (A + 2I) \underbrace{BC}_{3I} (A + I)$$

$$= (A + 2I)2I(A + I)$$

$$= 2(A^T + A + 2A + 2I) = 2(A^T + 3A + 2I)$$

حال A^T را محاسبه کرده و در عبارت بالا جای گذاری می‌کنیم:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 2(A^T + 3A + 2I)$$

$$= 2\left(\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 14 & 10 \\ 10 & 14 \end{bmatrix}$$



۲۷- گزینه ۳ فرض می‌کنیم $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ باشد.

$$AB = B + I \Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2a+4b & a+b \\ 2c+4d & c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a+4b=3 \\ a+b=1 \end{cases} \Rightarrow a=\frac{1}{2}, b=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2c+4d=4 \\ c+d=2 \end{cases} \Rightarrow c=2, d=0$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 4A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$$

۲۸- ابتدا A^2 و AB را محاسبه می‌کنیم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ -6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^2 - AB - 2B = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ -6 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = 4I$$

$$(A^2 - AB - 2A)^4 = 4^4 I = 256I$$

۲۹- توجه در ماتریس‌ها اتحادها برقرار نیستند.

$$(A-B)^T + (A-B)B = (A-B)(A-B) + (A-B)B$$

$$= (A-B)(A-B+B) = A^2 - BA \stackrel{A^T=A}{=} A - BA$$

۳۰- خواستار جمع باشد که از $A^T = I$ نمی‌توان نتیجه گرفت $A = I$ است.

راستی چون A با I تعویض پذیر است، اتحادها برقرارند.

$$(A+I)^T - (A^T - A) = A^T + 2A^T + 2A + I - (A^T - 2A + I)$$

از این که $A^T = I$ ، نتیجه می‌گیریم $A^T = A$.

$$= A + 2I + 2A + I - (I - 2A + I) = 6A + 2I$$

۳۱- ابتدا ضربها را انجام می‌دهیم.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ -3 \\ x \end{bmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2x & -3 & 2x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ -3 \\ x \end{bmatrix} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 2x - 15 = 0 \Rightarrow x^2 + x - \frac{15}{2} = 0$$

فرض کنیم ریشه‌های این معادله x_1 و x_2 باشند، داریم:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{S}{P} = \frac{-1}{-\frac{15}{2}} = \frac{2}{15}$$

۳۲- در معادله درجه دوم $x^2 - Sx + P = 0$ جمع ریشه‌ها و P ضرب ریشه‌هاست.

۲۲- گزینه ۴ برای این که درایه سطر اول و ستون سوم A^2 را حساب کنیم کافی است سطر اول A را در ستون سوم A ضرب کنیم:

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = a + 1 + 1 = -2 \Rightarrow a = -4$$

$$\text{مجموع درایه‌های قطر و زیر آن} = -4 + 2 + 1 + b + 0 + 3 = \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow b = \frac{5}{2}$$

$$[a+b] = [-4 + \frac{5}{2}] = [-\frac{3}{2}] = -2$$

۲۳- گزینه ۳ لازم نیست کامل هر سه ضرب را انجام دهیم. کافی

است درایه سطر اول و ستون اول را محاسبه کنیم. برای این کار سطر اول ماتریس اول را در کل ماتریس دوم ضرب کرده و حاصل را در ستون اول ماتریس سوم ضرب می‌کنیم و برابر ۱۶ قرار می‌دهیم.

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & x-1 \\ x & x+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x+1 \\ 2 \end{bmatrix} = 16$$

$$\begin{bmatrix} x & x+3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x+1 \\ 2 \end{bmatrix} = 16 \Rightarrow x^2 + 3x + 6 = 16$$

$$\Rightarrow x^2 + 3x - 10 = 0 \Rightarrow x = -5, x = 2$$

که $x = 2$ در گزینه‌ها است. اگر $x = -5$ نیز در گزینه‌ها بود باید یک درایه دیگر نیز بررسی می‌شد.

۲۴- گزینه ۳ چون A ماتریس سطری با k ستون است پس

$B_{(2k-3) \times 1}$ است و $A_{1 \times k}$ است و B ماتریس ستونی با $2k-3$ سطر است. پس $B_{(2k-3) \times 1}$ است. برای این که حاصل ضرب AB تعریف شود باید تعداد ستون‌های A با سطرهای B برابر باشد:

$$k = 2k - 3 \Rightarrow k = 3$$

از طرفی حاصل AB ماتریس 1×1 خواهد بود.

۲۵- گزینه ۴ ماتریس بالامتثلی، ماتریسی است که عناصر زیر

قطر اصلی آن صفر باشند. چون AB ماتریس 2×2 می‌شود، پس درایه سطر دوم و ستون اول آن باید صفر باشد.

$$A \text{ ستون اول } \times B \text{ سطر دوم} = \begin{bmatrix} 4 & m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ n \end{bmatrix} = 8 + 4m + 0 = 0$$

$$\Rightarrow m = -2$$

۲۶- گزینه ۱ چون A پایین‌متثلی است، بالای قطر اصلی آن صفر

می‌باشد، در نتیجه $b = 0$ است.

ستون سوم $A \times$ سطر دوم $B =$ درایه سطر دوم و ستون سوم BA

$$= \begin{bmatrix} a & a & 2+a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 3 \Rightarrow 2+a=3 \Rightarrow a=1$$



۳۲- گزینه ۴

ابتدا ضربها را انجام می‌دهیم:

$$\begin{bmatrix} x & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2x+7 & x & 2+a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 7x + 2x + 2 + a = 0 \Rightarrow 2x^2 + 9x + 2 + a = 0$$

چون یکی از ریشه‌ها صفر است آن را در معادله قرار می‌دهیم و $a = -2$ به دست می‌آید. حال ریشه دیگر معادله را به دست می‌آوریم:

$$2x^2 + 9x + 0 = 0 \Rightarrow x(2x + 9) = 0 \Rightarrow x = -\frac{9}{2}$$

۳۳- گزینه ۲

A^2 را تشکیل می‌دهیم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} a & b & b \\ a & b & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & b \\ a & b & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^2+ab & ab+b^2 & ab+b^2 \\ a^2+ab & ab+b^2 & ab+b^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

با توجه به صورت سؤال داریم:

$$A^2 = \frac{1}{4}(A^2) \Rightarrow \text{مجموع درایه‌های } A^2 = \frac{1}{4}(\text{مجموع درایه‌های } A^2)$$

$$\Rightarrow 2a + 4b = \frac{1}{4}(2a^2 + 4b^2 + 6ab)$$

$$\Rightarrow 2(a + 2b) = \frac{1}{4}(a^2 + 2ab + a^2 + 4b^2 + 4ab)$$

$$\Rightarrow 2(1) = \frac{1}{4}(a^2 + 2ab + (a + 2b)^2)$$

$$\Rightarrow 8 = a^2 + 2ab + 1 \Rightarrow a(a + 2b) = 7 \Rightarrow a = 7$$

۳۴- گزینه ۲

ابتدا $A+B$ را تشکیل می‌دهیم:

$$A+B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

چون $A+B$ قطری است و C نیز قطری است پس تعویض پذیرند، یعنی:

$$(A+B)C = C(A+B)$$

۳۵- گزینه ۲

مجموع عناصر روی قطر اصلی AB با مجموع

عناصر روی قطر اصلی BA برابر است.

در نتیجه مجموع عناصر روی قطر اصلی $AB - BA$ برابر صفر است.

که تنها ۴ دارای این ویژگی است.

۳۶- گزینه ۲

ابتدا دو ماتریس A و B را تشکیل می‌دهیم.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

چون هر دو ماتریس بالامتثلی هستند، AB نیز بالامتثلی بوده و عناصر روی قطر اصلی آن برابر است با حاصل ضرب عناصر روی قطر اصلی A و B .

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 14 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$1^2 + 4^2 + 9^2 = 98 \Rightarrow \text{مجموع مجذور درایه‌های قطر اصلی}$$

۳۷- گزینه ۲

ابتدا چند توان از A را محاسبه می‌کنیم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{1397} = \begin{bmatrix} 1 & 1397 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$a+b+c+d = 1+1397+0+1 = 1399$$

۳۸- گزینه ۲

اول بیاییم ماتریس A و A^2 را تشکیل دهیم.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 12 & 12 & 12 \\ 18 & 18 & 18 \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} = 6A$$

$$A^3 = A^2 A = 6A^2 = 6(6A) = 6^2 A$$

در نتیجه $A^6 = 6^5 A$ پس $x = 6$ و $y = 9$ یعنی $x + y = 15$ است.

۳۹- گزینه ۳

اول باید A^2 و A^3 و ... را حساب کنیم تا ببینیم

$$A^2 - A + I = O \Rightarrow A^2 = A - I$$

چه می‌شود:

$$A^3 = A \times A^2 = A(A - I) = A^2 - A \xrightarrow{A^2 = A - I} A^3 = A - I - A = -I$$

$$A^3 = A - I - A = -I$$

پس $A^3 = -I$ شده است. برای ساختن A^{97} ، عبارت $A^3 = -I$ را به

توان ۳۲ می‌رسانیم و در آخر در A ضرب می‌کنیم:

$$(A^3)^{32} A = (-I)^{32} A \Rightarrow A^{97} = A$$

۴۰- گزینه ۲

ماتریس‌های قطری وقتی به توان می‌رسند قطری

باقی می‌ماند و درایه‌های روی قطرشان به توان می‌رسد.

$$A^n - A^{n-1} = \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^n - 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2^{n-1}(2-1) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$



پاسخنامه تشریحی

در نتیجه:

$$A^{100} = \begin{bmatrix} 1 & 100 & 100 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ مجموع درایه‌های بالای قطر اصلی $= 200$

۴۶- گزینه ۲: ماتریس‌های مثلثی وقتی به توان می‌رسند، مثلثی باقی می‌مانند و درایه‌های روی قطر آن‌ها نیز به توان می‌رسد.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^5 = \begin{bmatrix} 1^5 & 5 \cdot 2^5 & 10 \cdot 2^4 - 5 \cdot 1^5 \\ 0 & 3^5 & 5 \cdot 4 \cdot 3^4 \\ 0 & 0 & 1^5 \end{bmatrix}$$

A^5 مجموع درایه‌های قطر اصلی $= 1^5 + 3^5 + 1^5 = 245$

۴۷- گزینه ۳: اول A^2 را حساب می‌کنیم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 \\ -3 & 3 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \end{bmatrix} = 3A$$

$$A^2 = 3A \xrightarrow{\times A} A^3 = 3A^2 \xrightarrow{A^2=3A} = 3^2 A$$

$$\Rightarrow A^n = 3^{n-1} A \Rightarrow A^n \text{ مجموع درایه‌های } = 3^{n-1} = 729 = 3^6$$

$$\Rightarrow n = 7$$

۴۸- گزینه ۱: برای ماتریس C کافی است ماتریس B را زیر ماتریس A بنویسیم.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 24 \\ \frac{1}{3} & 1 & 2 & 8 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 4 \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

با محاسبه عناصر روی قطر اصلی C^2 متوجه می‌شویم که همگی ۴ هستند بنابراین مجموع آن‌ها برابر ۱۶ است.

۴۹- نکته: بسط دوجمله‌ای نیوتن به صورت زیر است:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

نکته: اگر $A^2 = A$ باشد، هر توانی از آن نیز A می‌شود.

$$(A-I)^5 = \binom{5}{0} A^5 (-I)^0 + \binom{5}{1} A^4 (-I)^1 + \binom{5}{2} A^3 (-I)^2 + \binom{5}{3} A^2 (-I)^3 + \binom{5}{4} A (-I)^4 + \binom{5}{5} (-I)^5$$

$$= A - 5A + 10A - 10A + 5A - I = A - I = mA + nI$$

$$\Rightarrow m = 1, n = -1 \Rightarrow m+n = 0$$

۴۱- گزینه ۲: اول چند توان از A را حساب می‌کنیم تا ببینیم چه اتفاقی پیش می‌آید.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I$$

حال $A^2 = -I$ را باید به توانی برسانیم که ۱۵! ساخته شود.

$$(A^2 = -I)^{1 \times 3 \times 4 \times \dots \times 15} \Rightarrow A^{15!} = I$$

۴۲- گزینه ۳: چند توان اول A را محاسبه می‌کنیم:

$$2A^2 = A \Rightarrow A^2 = \frac{1}{2} A$$

$$A^2 = A^2 A = \left(\frac{1}{2} A\right) A = \frac{1}{2} A^2 \xrightarrow{A^2 = \frac{1}{2} A} \frac{1}{2^2} A$$

$$A^4 = A^2 A = \left(\frac{1}{2^2} A\right) A = \frac{1}{2^2} A^2 \xrightarrow{A^2 = \frac{1}{2} A} \frac{1}{2^3} A$$

با توجه به روند بالا نتیجه می‌گیریم که $A^n = \frac{1}{2^{n-1}} A$ ؛ بنابراین $A^{100} = \frac{1}{2^{99}} A$ است.

۴۳- گزینه ۳: اول A^2 را محاسبه می‌کنیم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

چون $A^2 = I$ است پس توان‌های زوج I و توان‌های فرد A می‌شود.

$$A^{20} - A^{19} = I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۴۴- گزینه ۱: اول A^2 را حساب می‌کنیم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = A$$

چون $A^2 = A$ شد، هر توانی از آن نیز A می‌شود (به A ماتریس خودتوان می‌گویند).

$$A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5 = 5A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌ها $= 10$

۴۵- گزینه ۳: بیایم اول چند توان از A را حساب کنیم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



هندسه ۳ نردبام

۵۰- گزینه ۱ چون $A^T = A$ است، به هر توانی برسد برابر A می‌شود.

$$A^5 + 2A = I \Rightarrow A + 2A = I \Rightarrow 3A = I$$

حال $(3A - 2I)^4 = (I - 2I)^4 = I$ را تشکیل می‌دهیم:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \times 3 & 2 \times 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \times 3 & 2 \times 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \times 3 & 3 \times 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^6 = \begin{bmatrix} 1 & 6 \times 3 & 6 \times 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

به این نتیجه می‌رسیم که:

$$\text{جمع درایه‌های سطر اول} = 1 + 6 \times 3 + 6 \times 3 = 37$$

۵۲- گزینه ۳ چون $A^T = \bar{O}$ است هر توان بزرگ‌تر مساوی ۳ در آن نیز صفر می‌شود.

حال اتحاد داده‌شده را باز می‌کنیم:

$$\begin{aligned} A(A - 2I)^T &= A(A^T - 2A^T + 12A - 8I) \\ &= \underbrace{A}_{\bar{O}} - \underbrace{2A^T}_{\bar{O}} + 12A^T - 8A = 12A^T - 8A \end{aligned}$$

$$(B^T + I)(B^T - I) = \bar{O} \Rightarrow B^T - I = \bar{O} \Rightarrow B^T = I$$

$$AB - B^T A = \bar{O} \Rightarrow AB = B^T A$$

$$AB^T = \underbrace{AB}_{B^T A} B B B = B^T \underbrace{AB}_{B^T A} B B = B^T \underbrace{AB}_{B^T A} B$$

$$= B^T \underbrace{AB}_{B^T A} = B^T A = IA = A$$

۵۴- گزینه ۴ دقت کنید که چون $AB \neq BA$ بنابراین

$$B(AB)^9 A = B \underbrace{(AB) \dots (AB)}_{9 \text{ تا}} A \quad (AB)^n \neq A^n B^n$$

$$= (BA)(BA) \dots (BA) = (BA)^{10}$$

حالا برای محاسبه $(BA)^{10}$ ابتدا چند توان اول BA را محاسبه می‌کنیم:

$$(BA)^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = 2(BA)$$

$$(BA)^T = 2(BA)$$

$$\Rightarrow (BA)^T = (BA)^T (BA) = 2(BA)^T = 2^2(BA)$$

$$(BA)^{10} = 2^9(BA) = \begin{bmatrix} 2^9 & 2^9 & 2^9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^9 & 2^9 & 2^9 \end{bmatrix}$$

پس می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\text{مجموع درایه‌ها} = 6 \times 2^9 = 3 \times 2^{10}$$