



بخش‌پذیری در اعداد صحیح ...

با مفهوم بخش‌پذیری در اعداد صحیح همگی کم و بیش آشنا هستیم. برای مثال ۴ بر ۲ بخش‌پذیر است، چون کسر $\frac{4}{2} = 2$ عددی صحیح است ولی ۴ بر ۳ بخش‌پذیر نیست چون $\frac{4}{3}$ عددی صحیح نیست.

بنابراین یک جورهایی می‌توان گفت اگر $\frac{a}{b} = q$ عددی صحیح شود (a و b اعداد صحیح و $b \neq 0$ است)، a بر b بخش‌پذیر است. گفتیم یک جورهایی، چون دانشمندان! در تعریف بخش‌پذیری به دلایلی که کمی جلوتر به شما خواهیم گفت، تصمیم گرفته‌اند این کسر را طرفین‌وسطین شده بیاورند!

حواستون باشه! عدد صحیح a را بر عدد صحیح b بخش‌پذیر می‌گویند، اگر عدد صحیحی مثل q پیدا شود به طوری که: $a = bq$

تست چند عدد دورقمی وجود دارد که بر ۴ بخش‌پذیر باشد؟

۲۱ (۴)

۲۴ (۳)

۲۳ (۲)

۲۲ (۱)

پاسخ - گزینه «۱» دیدیم که اگر a بر b بخش‌پذیر باشد، $a = bq$ است. بنابراین اگر x بر ۴ بخش‌پذیر باشد، می‌توان نوشت: $x = 4q$

$$10 \leq x \leq 99 \Rightarrow 10 \leq 4q \leq 99 \Rightarrow 2/5 \leq q \leq 24/75$$

می‌خواهیم عدد دورقمی باشد، بنابراین:

$$24 - 3 + 1 = 22$$

پس q از ۳ تا ۲۴ می‌تواند باشد:

نکته

$$b - a + 1$$

۱ حتماً یادتان هست که تعداد عددهای طبیعی بزرگ‌تر مساوی a و کوچک‌تر مساوی b برابر است با:

$$\left[\frac{n}{a} \right]$$

۲ تعداد مضارب طبیعی عدد a که کوچک‌تر مساوی n باشد، برابر است با:

این نکته دوم یعنی این‌که اگر برای مثال بخواهیم پیدا کنیم چند عدد طبیعی کوچک‌تر مساوی ۲۰۰ وجود دارد که بر ۵ بخش‌پذیر باشد، به جای محاسبه‌ای که در سؤال قبل انجام دادیم، می‌توانیم خیلی راحت بنویسیم:

$$\left[\frac{200}{5} \right] = 40$$

این کار را در سؤال بعد تمرین می‌کنیم:

تست چند عدد از مجموعه $\{232, 233, \dots, 432, 433, \dots, 234, 235, \dots\}$ بر ۶ بخش‌پذیر است؟

۴۰ (۴)

۳۹ (۳)

۳۸ (۲)

۳۷ (۱)

$$\left[\frac{432}{6} \right] = 72$$

پاسخ - گزینه «۲» اول مضارب ۶ که کوچک‌تر مساوی عدد ۴۳۲ است را پیدا می‌کنیم:

اساساً مضارب ۶ را در فاصله $(232, 233, \dots, 432, 433, \dots, 234, 235, \dots)$ می‌خواهیم ولی مضارب ۶ را در فاصله $(1, 2, \dots, 432)$ پیدا کرده‌ایم.

کل

پس یک سری مضارب ۶ را زیاد حساب کرده‌ایم که باید آن‌ها را پیدا کرده و کم کنیم:

$$\left[\frac{432}{6} \right] - \left[\frac{231}{6} \right] = 72 - 38 = 34$$

عادکردن

برعکس رابطه بخش‌پذیری ما یک رابطه‌ای داریم به نام عادکردن:

$$a = b \cdot q \Leftrightarrow b \mid a$$

حواستون باشه! ۱ اگر $a = bq$ آن‌گاه b عاد می‌کند a (یا این‌که b می‌شمارد a را).

$$a = bq \Leftrightarrow \begin{cases} a \text{ بر } b \text{ بخش‌پذیر است.} \\ b \text{ عاد می‌کند } a \end{cases}$$

۲ از رابطه $a = bq$ دو نتیجه می‌توان گرفت:



دقت کنید هرگاه ضرب چند عدد برابر عددی دیگر شود، هر کدام از آن چند عدد، عدد دیگر را عاد می‌کند. برای مثال:

$$30 = 2 \times 3 \times 5 \Rightarrow \begin{cases} 2 \mid 30 & 6 \mid 30 \\ 3 \mid 30 & 10 \mid 30 \\ 5 \mid 30 & 15 \mid 30 \end{cases}$$

تست - اگر $a^x - b = 1$ باشد، کدام گزینه همواره درست نیست؟

(۱) $a^x - 1 \mid b$ (۲) $a^x + 1 \mid b$ (۳) $a^x - a + 1 \mid b$ (۴) $a^x + a + 1 \mid b$

پاسخ - گزینه «۲» روش اول:

$$a^x - b = 1 \Rightarrow a^x - 1 = b \Rightarrow (a^x - 1)(a^x + 1) = b \Rightarrow (a - 1)(a^x + a + 1)(a + 1)(a^x - a + 1) = b$$

وقتی ضرب دو یا چند عدد برابر عددی مثل b شود، همه آن عددها b را عاد می‌کند. بنابراین گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) درست است ولی گزینه (۲) لزوماً درست نیست.

روش دوم: سعی می‌کنیم مقادیری برای a و b پیدا کنیم تا شرط سؤال برقرار شود.

اگر $a = 2$ و $b = 63$ باشد، گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱ $a^x - 1 \mid b \Rightarrow 3 \mid 63 \checkmark$

۲ $a^x + 1 \mid b \Rightarrow 5 \mid 63 \times$

۳ $a^x - a + 1 \mid b \Rightarrow 3 \mid 63 \checkmark$

۴ $a^x + a + 1 \mid b \Rightarrow 7 \mid 63 \checkmark$

چند تا نکته مهم دربارهٔ عادکردن

۱ برای تشخیص درستی یا نادرستی یک رابطهٔ عادکردن کافی است آن را 90° درجه خلاف عقربه‌های ساعت بچرخانید تا به یک کسر تبدیل شود. اگر حاصل کسر عدد صحیحی شد، رابطه درست است وگرنه رابطه نادرست است. برای مثال:

رابطه نادرست است. $5 \mid 15 \xrightarrow{90^\circ} \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \times$

رابطه درست است. $8 \mid 16 \xrightarrow{90^\circ} \frac{16}{8} = 2$

۲ اگر a عددی صحیح باشد و $a \mid x$ آن‌گاه x مقسوم‌علیه a است.

برای مثال اگر $6 \mid x$ آن‌گاه x می‌تواند هر یک از مقسوم‌علیه‌های ۶ یعنی عددهای $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ باشد.

۳ اگر a عددی صحیح باشد و $a \mid x$ آن‌گاه x مضرب a است.

برای مثال اگر $8 \mid x$ آن‌گاه x می‌تواند هر یک از عددهای مقابل باشد:

$0, \pm 8, \pm 16, \pm 24, \dots$

تست - چند عدد طبیعی وجود دارد که مقسوم‌علیه 1200 و مضرب 24 باشد؟

(۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۹

پاسخ - گزینه «۲» دنبال x هایی هستیم که مقسوم‌علیه 1200 باشند، این یعنی:

هم‌چنین می‌خواهیم x مضرب 24 باشد، یعنی:

(I) $x \mid 1200$

(II) $24 \mid x$

ابتدا رابطه (II) را به تساوی تبدیل می‌کنیم بعد در رابطه (I) قرار می‌دهیم: $24 \mid x \Rightarrow x = 24q \xrightarrow{\text{جای‌گذاری در (I)}} 24q \mid 1200$

حالا اگر بخواهیم این رابطه برقرار باشد، باید کسر $\frac{1200}{24q}$ عددی صحیح شود. این کسر را ساده می‌کنیم:

$$\frac{1200}{24q} = \frac{50}{q}$$

$q = 1, 2, 5, 10, 25, 50$

بنابراین q باید مقسوم‌علیه 50 باشد. مقادیر طبیعی قابل قبول این‌ها هستند:

تست - اگر $n! \mid 1001$ و $m! \mid 1024$ کم‌ترین مقدار $m + n$ کدام است؟

(۱) ۲۳ (۲) ۲۵ (۳) ۲۹ (۴) ۲۰۲۵

پاسخ - گزینه «۲» عددها را تجزیه می‌کنیم:

$1001 = 7 \times 11 \times 13$

$1024 = 2^{10}$

چون $n! \mid 1001$ پس کسر $\frac{n!}{7 \times 11 \times 13}$ باید عددی صحیح باشد. کوچک‌ترین عدد فاکتوریلی که هر سه عامل ۱۳، ۱۱، ۷ را دارد همان $13!$ است. پس $n = 13$.

همچنین می‌خواهیم کسر $\frac{m!}{p_1!}$ عددی صحیح شود، پس m باید 10 تا عامل 2 داشته باشد. شروع می‌کنیم می‌رویم جلو تا پیدا کنیم اولین عدد فاکتوریلی که 10 عامل 2 دارد چه عددی است:

عدد	$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 \times 11 \times 12$	$2^2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 \times 11 \times 12$	$2^3 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 \times 11 \times 12$	$2^4 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 \times 11 \times 12$	$2^5 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 \times 11 \times 12$	$2^6 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 \times 11 \times 12$
تعداد عوامل 2	(1)	(2)	(1)	(3)	(1)	(2)

$$\min(m+n) = 12+13 = 25$$

همان‌طور که می‌بینید کوچک‌ترین مقدار m برابر 12 است؛ بنابراین:

چند ویژگی ابتدایی از بخش‌پذیری

$$a \mid \pm a$$

$$\pm 1 \mid a$$

$$a \mid 0$$

$$0 \nmid a, a \neq 0$$

$$0 \mid 0$$

۱ هر عددی بر خودش و قرینه‌اش بخش‌پذیر است:

۲ هر عددی بر 1 و -1 بخش‌پذیر است:

۳ صفر بر همهٔ عددها بخش‌پذیر است:

(پون آگه تبدیلش کنی به کسر می‌شه $\frac{0}{a} = 0$ که عددی صفریه!)

۴ هیچ عدد مخالف صفری بر صفر بخش‌پذیر نیست:

(این هم واضحه ریگه. آگه تبدیل به کسرش کنی فیلی بد می‌شه! $\frac{a}{0}$)

۵ صفر بر خودش بخش‌پذیر است!

این را ممکن است به کسرش فکر کنید و بگویید نمی‌شود که!

اما اول درس یادتان هست گفتیم که دانشمندان به دلایلی تصمیم گرفته‌اند فرمول رابطهٔ عاگردن را طرفین‌وسطین‌شده بدهند. دلیلش

$$a \mid b \Leftrightarrow b = aq$$

همین‌هاست. چون دیدیم که:

$$0 \mid 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \times q$$

تست- کدام یک از رابطه‌های زیر فقط به ازای یک مقدار صحیح a برقرار است؟

$$0 \mid a^2 - a - 2 \quad (4)$$

$$0 \mid a^2 + a - 2 \quad (3)$$

$$0 \mid 2a^2 + a - 1 \quad (2)$$

$$0 \mid 2a^2 - a + 1 \quad (1)$$

پاسخ- گزینهٔ «۳» دیدیم که تنها عددی که بر صفر بخش‌پذیر است خود صفر است پس باید دنبال معادله‌ای بگردیم که یک جواب صحیح داشته باشد.

۱ همواره مثبت است. جواب ندارد. $\Rightarrow \Delta = 1 - 8 = -7 < 0 \Rightarrow 2a^2 - a + 1 \Rightarrow \Delta = 1 - 8 = -7 < 0$

۲ یک جواب دارد. $\Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = \frac{1}{2} \end{cases}$ غلط

۳ دو جواب دارد. $\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -2 \end{cases}$

۴ دو جواب دارد. $\Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -1 \end{cases}$

نکته

این دو نکته خارج از کتاب است اما حتماً باید بلد باشید. (پون توکنکور می‌دار!)

۱ تعداد مقسوم‌علیه‌های یک عدد: برای پیدا کردن تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد n اول آن را به عوامل اولش تجزیه می‌کنیم:

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$$

سپس از رابطهٔ مقابل تعداد مقسوم‌علیه‌ها را پیدا می‌کنیم: $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$ = تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد n

۲ توان عدد اول p در تجزیهٔ $n!$: برای پیدا کردن تعداد عوامل عدد اول p در تجزیهٔ $n!$ از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

$$\left[\frac{n}{p} \right] + \left[\frac{n}{p^2} \right] + \left[\frac{n}{p^3} \right] + \cdots$$



تست - عدد ۱۸۰۰ چند مقسوم علیه طبیعی و چند مقسوم علیه مربع کامل دارد؟

۴ - ۳۶ (۴)

۸ - ۳۶ (۳)

۴ - ۱۸ (۲)

۸ - ۱۸ (۱)

$1800 = 2^3 \times 3^2 \times 5^2$

$(3+1)(2+1)(2+1) = 36$

پاسخ - گزینه «۳» اول عدد را تجزیه می‌کنیم تا ببینیم چه خبر است:

طبق آن چه گفتیم تعداد مقسوم علیه‌های طبیعی آن برابر است با:

حالا بررسی می‌کنیم چند تا از این مقسوم علیه‌ها مربع کامل است.

فرض کنید x مقسوم علیه ۱۸۰۰ باشد، این یعنی این که کسر $\frac{1800}{x}$ عددی صحیح است. (مفهوم مقسوم علیه همیشه دریغه!) حالا اگر x بخواید مربع کامل هم باشد، باید توان تمام عوامل آن زوج باشد.

$\frac{1800}{x} = \frac{2^3 \times 3^2 \times 5^2}{2^\alpha \times 3^\beta \times 5^\gamma}$

از طرفی واضح است که x فقط می‌تواند عوامل ۲، ۳ و ۵ داشته باشد. (وگرنه کسر ساده نمی‌شه.)

پس ما دوتا شرط داریم. اول این که توان عوامل صورت بزرگتر مساوی توان عوامل مخرج باشد و دوم این که α ، β و γ هر سه زوج باشند.

پس هر کدام از α ، β و γ دو حالت می‌توانند داشته باشند، یا صفر باشند یا ۲. بنابراین:

$$\begin{matrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{matrix} \Rightarrow 2 \times 2 \times 2 = 8$$
 تعداد مقسوم علیه‌های مربع کامل

(برای مثال اگر $\alpha = 2$ ، $\beta = 0$ ، $\gamma = 2$ باشد، مقسوم علیه ما می‌شه $100 = 2^2 \times 5^2$ که همین جور که می‌بینید، مربع کامله)

تست - بزرگ‌ترین مقدار n از رابطه $100! \mid n^n$ کدام است؟

۳۳ (۴)

۳۲ (۳)

۱۶ (۲)

۱۳ (۱)

پاسخ - گزینه «۳» اول از رابطه‌ای که گفتیم توان عدد ۲ را در تجزیه $100!$ پیدا می‌کنیم:

$$\left[\frac{100}{2}\right] + \left[\frac{100}{4}\right] + \left[\frac{100}{8}\right] + \left[\frac{100}{16}\right] + \left[\frac{100}{32}\right] + \left[\frac{100}{64}\right]$$

یک چیزی هم خوب است یادتان بدهیم. یک کار راحت‌تر این است که عدد را همین‌طور به ۲ تقسیم کنیم و بعد خارج قسمت‌ها را با هم جمع کنیم:

$$100 \begin{matrix} \downarrow 2 \\ 50 \\ \downarrow 2 \\ 25 \\ \downarrow 2 \\ 12 \\ \downarrow 2 \\ 6 \\ \downarrow 2 \\ 3 \\ \downarrow 2 \\ 1 \end{matrix} \Rightarrow 50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 97$$

(هواستون باشه این فرموله مال اعداد اوله. یه وقت تو مفرج ۸ قرار ندین!)

$\frac{100!}{n^n} = \frac{2^{97} \times \dots}{2^{3n}}$

خب الان فهمیدیم در تجزیه $100!$ توان عدد دو، ۹۷ است. حالا اگر قرار باشد $100! \mid n^n$ داریم:

این کسر باید عددی صحیح باشد بنابراین توان ۲ در صورت باید بزرگتر مساوی توان ۲ در مخرج باشد، بنابراین: $3n \leq 97 \Rightarrow n_{\max} = 32$

ویژگی‌های تکمیلی رابطه عادکردن

یک رابطه عادکردنی مثل $a \mid b$ را در نظر بگیرید. در این بخش می‌خواهیم بررسی کنیم از این $a \mid b$ چه نتایجی می‌شود گرفت و چه کارهایی با آن می‌شود کرد.

$a \mid b \Rightarrow \begin{cases} ma \mid mb \\ a^n \mid b^n \end{cases}$

طرفین یک رابطه عادکردن را می‌شود در هر عددی مثل m ضرب کرد یا به توان رساند.

(واضحه دریغه وقتی $a \mid b$ یعنی کسر $\frac{b}{a}$ عدد صحیح و وقتی یه کسر عدد صحیح باشه وقتی صورت و مفرش رو در یه عدد ضرب کنیم باز هم عدد صحیح و وقتی هم به توان n برسونیمش باز هم عدد صحیح.)

$2 \mid 4 \xrightarrow{\text{طرفین } \times 3} 6 \mid 12 \checkmark$

$2 \mid 4 \xrightarrow{\text{به توان } 3} 8 \mid 64 \checkmark$

$a \mid b \Rightarrow a \mid mb$

این خیلی رابطه مهمی است و به زودی می‌بینید چه قدر کاربرد دارد. دلیلش هم خیلی واضح است. وقتی $a \mid b$ یعنی این که می‌دانیم $\frac{b}{a}$ عددی صحیح است و وقتی یک کسر عددی صحیح باشد، صورت کسر را در هر عدد صحیحی ضرب کنیم، باز هم حاصل عددی صحیح است.

$2 \mid 4 \xrightarrow{\text{سمت راست } \times 3} 2 \mid 12$

پس یادتان باشد سمت راست رابطه عادکردن را می‌شود در هر عدد صحیحی ضرب کرد.

$c \mid b \Rightarrow c$ مقسوم علیه a باشد (یعنی $a \mid c$) و $a \mid b$

این هم درکش ساده است. $a \mid b$ یعنی b بر a بخش پذیر است. c مقسوم علیه a است، یعنی a بر c بخش پذیر است. بنابراین مشخص است b بر c هم بخش پذیر است. این یعنی این که اگر یک رابطه عادی کردن دیدید می توانید سمت چپش را به هر کدام از مقسوم علیه هایش تقسیم کنید.

$$36 \mid 18 \xrightarrow{\text{سمت چپ تقسیم بر 3}} 6 \mid 36$$

$$ab \mid c \Rightarrow \begin{cases} a \mid c \\ b \mid c \end{cases}$$

$$a \mid b \Rightarrow |a| \leq |b|, b \neq 0$$

وقتی کسر $\frac{b}{a}$ عدد صحیح است واضح است که باید قدرمطلق صورت از قدرمطلق مخرج بزرگتر یا مساوی آن باشد. $2 \mid -4 \Rightarrow |2| \leq |-4|$

۴ این رابطه را این جوری هم می توان گفت:

۵

تست - اگر $2a \mid 3b$ کدام نتیجه گیری ممکن است درست نباشد؟

$$a \mid b \quad (4)$$

$$a \mid 6b \quad (3)$$

$$2a \mid 3b^2 \quad (2)$$

$$a \mid 3b \quad (1)$$

$$2a \mid 3b \xrightarrow{\text{سمت چپ تقسیم بر 2}} a \mid 3b \quad \checkmark$$

پاسخ - گزینه «۴» در ۱ سمت چپ را تقسیم بر ۲ کرده ایم:

$$2a \mid 3b \xrightarrow{\text{سمت راست } \times b} 2a \mid 3b^2 \quad \checkmark$$

در ۲ سمت راست را در b ضرب کرده ایم:

در ۳ سمت راست را در ۲ ضرب و قسمت چپ را بر ۲ تقسیم کرده ایم:

$$2a \mid 3b \xrightarrow{\text{سمت چپ تقسیم بر 2}} a \mid 3b \xrightarrow{\text{سمت راست } \times 2} a \mid 6b \quad \checkmark$$

اما ۴ ممکن است درست نباشد برای مثال به ازای $a = 3$ و $b = 2$ رابطه صورت سؤال برقرار است اما: $3 \nmid 2$

تست - اگر $2b \mid a^2$ آن گاه رابطه $a \mid 2$ و رابطه $a \mid b$

(۱) درست است - درست است

(۳) ممکن است درست نباشد - ممکن است درست نباشد

(۴) درست است - ممکن است درست نباشد

پاسخ - گزینه «۲» این که از $2b \mid a^2$ نمی توانیم همواره نتیجه بگیریم که $a \mid 2$ واضح است، چون برای مثال کافی است $a = 3$ و $b = 18$ باشد.

اما تشخیص درستی یا نادرستی رابطه دوم احتیاج به دقت بیشتری دارد. به کسر $\frac{2b}{a^2}$ توجه کنید، این دوتا a در مخرج باید ساده شود. اگر a فرد باشد، واضح است که a^2 با ۲ ساده نمی شود و در نتیجه b باید بر a^2 بخش پذیر باشد پس b بر a هم بخش پذیر است.

$$\frac{2b}{a^2} = \frac{2b}{4k^2} = \frac{b}{2k^2} = \frac{b}{(2k) \times k}$$

اما فرض کنید a زوج باشد، در این صورت $a = 2k$ در این صورت:

می دانیم این کسر عددی صحیح است؛ بنابراین b باید یک جوری باشد که $2k^2$ در مخرج ساده شود. یعنی b هم باید بر ۲ بخش پذیر باشد و هم بر k و بنابراین باز هم بر a بخش پذیر است.

تست - اگر $a^5 \mid b^5$ کدام گزینه همواره درست است؟

$$a^{10} \mid b^7 \quad (4)$$

$$a^4 \mid b^3 \quad (3)$$

$$a^3 \mid b^2 \quad (2)$$

$$a^2 \mid b \quad (1)$$

پاسخ - گزینه «۳» یک راه برای پاسخ دادن این مدل سؤال ها پیدا کردن مثال نقض برای رد کردن گزینه هاست. برای این کار باید تلاش کنیم a و b را جوری در نظر بگیریم که دو طرف رابطه صورت سؤال برابر شود. یعنی الان می خواهیم $a^5 = b^5$ شود. اگر $a = b = 1$ باشد، دو طرف برابر می شوند ولی این مثال نقض به دردمان نمی خورد چون به ازای آن هر ۴ گزینه درست می شود. پس باید یک مثال دیگر پیدا کنیم. کوچک ترین مقادیر a و b که دو طرف را برابر می کند $a = 2^5$ و $b = 2^7$ است. (دقت کنید توان این رو داریم به اون، توان اون رو داریم به این!) در این صورت $(2^5)^5 = (2^7)^5$ و رابطه $a^5 \mid b^5$ به صورت $2^{25} \mid 2^{35}$ درمی آید که درست است. حالا اگر با همین عددها گزینه ها را بررسی کنیم داریم:

$$1 \quad a^2 \mid b \Rightarrow (2^5)^2 \mid 2^7 \Rightarrow 2^{10} \mid 2^7 \quad \times$$

$$2 \quad a^3 \mid b^2 \Rightarrow (2^5)^3 \mid (2^7)^2 \Rightarrow 2^{15} \mid 2^{14} \quad \times$$

$$3 \quad a^4 \mid b^3 \Rightarrow (2^5)^4 \mid (2^7)^3 \Rightarrow 2^{20} \mid 2^{21} \quad \checkmark$$

$$4 \quad a^{10} \mid b^7 \Rightarrow (2^5)^{10} \mid (2^7)^7 \Rightarrow 2^{50} \mid 2^{49} \quad \times$$

حواستان باشد که اثبات تشریحی این نوع سؤال ها ساده نیست.

برای مثال اگر بخواهیم از درستی $a^5 \mid b^5$ به درستی $a^4 \mid b^3$ برسیم باید این کار را بکنیم:

$$a^5 \mid b^5 \xrightarrow{\text{ریشه هفتم می گیریم}} a^4 \mid b^3 \xrightarrow{\text{سمت راست } \times b} a^{28} \mid b^{21} \xrightarrow{\text{به توان 4}} a^7 \mid b^5$$



نکته اگر بخواهیم رابطه $a^m \mid b^n \Rightarrow a^p \mid b^q$ درست باشد، باید $np \leq mq$ باشد.

برای درک بهتر:

$$a^m \mid b^n \Rightarrow a^p \mid b^q \Rightarrow \text{دور} \times \text{دور} \leq \text{نزدیک} \times \text{نزدیک}$$

یک ویژگی مهم دیگر از بخش پذیری

$$\begin{cases} a \mid b \\ a \mid c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \mid b+c \\ a \mid b-c \\ a \mid bc \\ a \mid mb \pm nc \end{cases}$$

این ویژگی خیلی کاربرد دارد و برای مثال در بخش بعد که معادله‌های عادکردنی است، کاربردهایش را می‌بینید.

یعنی اگر عددی مثل a هر دو عدد b و c را عاد کند، a هر مضربی از b به علاوه یا منهای هر مضربی از c را عاد می‌کند. خوب است این یکی را برایتان اثبات کنیم تا با اثبات این نوع رابطه‌ها آشنا شوید:

$$\begin{cases} a \mid b \\ a \mid c \end{cases} \Rightarrow a \mid mb + nc$$

$$\begin{cases} a \mid b \Rightarrow b = aq \xrightarrow{\times m} mb = maq \\ a \mid c \Rightarrow c = aq' \xrightarrow{\times n} nc = naq' \end{cases} \xrightarrow{\oplus} mb + nc = maq + naq' = a(mq + nq')$$

$$\Rightarrow mb + nc = aq'' \Rightarrow a \mid mb + nc$$

تست - مجموع ارقام بزرگ‌ترین عددی که هر دو عدد $6n+5$ و $7n+3$ بر آن بخش پذیرند، کدام است؟

۴ (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۱۰ (۴)

پاسخ - گزینه «۳» عدد a می‌نامیم. هر دو عدد $6n+5$ و $7n+3$ بر a بخش پذیرند، بنابراین:

$$\begin{aligned} a \mid 7n+3 &\xrightarrow{\times 6 \text{ سمت راست}} a \mid 42n+18 \\ a \mid 6n+5 &\xrightarrow{\times 7 \text{ سمت راست}} a \mid 42n+35 \end{aligned} \xrightarrow{(-)} a \mid 17$$

در این مدل سؤال‌ها باید با ضرب کردن سمت راست‌ها، متغیر را حذف کنیم. پس بزرگ‌ترین مقدار a برابر ۱۷ است که مجموع ارقام آن برابر $7+1=8$ است.

تست - از رابطه $53m-11 \mid 7$ کدام نتیجه‌گیری درست است؟

$7 \mid m-1$ (۱) $7 \mid m-2$ (۲) $7 \mid m+1$ (۳) $7 \mid m+2$ (۴)

پاسخ - گزینه «۱» با توجه به گزینه‌ها باید از شرط ضرب m یعنی ۵۳ و ۱۱ راحت شویم. از ویژگی‌های عادکردن استفاده می‌کنیم.

سعی می‌کنیم دوروبر عدد ۵۳ و ۱۱ مضرب ۷ پیدا کنیم:

$$7 \mid 49 \Rightarrow \begin{aligned} &7 \mid 49m \\ &\xrightarrow{(-)} 7 \mid 49m - 11(4m-11) \end{aligned}$$

دیدیم وقتی سمت چپ در رابطه عادکردن یکسان است می‌توانیم سمت راست‌ها را از هم کم کنیم. حالا می‌رویم سراغ ۱۱. داریم:

$$\begin{aligned} 7 \mid 49m - 11 &\xrightarrow{\oplus} 7 \mid 49m - 4 \Rightarrow 7 \mid 4(m-1) \\ 7 \mid 7 &\end{aligned}$$

اگر این رابطه را به کسر تبدیل کنیم، به صورت $\frac{4(m-1)}{7}$ درمی‌آید. این یعنی $4(m-1)$ بر ۷ بخش پذیر است و چون ۴ نمی‌تواند بر ۷ بخش پذیر باشد، پس $m-1$ باید بر ۷ بخش پذیر باشد و در نتیجه:

یک ویژگی دیگر این است که از $a \mid b$ و $c \mid d$ می‌توانیم نتیجه بگیریم $ac \mid bd$.

تست - اگر $3m+1$ بر ۵ و $9m+1$ بر ۷ بخش پذیر باشد، کدام یک از عبارات زیر بر ۳۵ بخش پذیر است؟

$8m^2+12m-1$ (۱) $8m^2+12m-1$ (۳) $8m^2-12m+1$ (۲) $8m^2-12m+1$ (۴)

پاسخ - گزینه «۴» همان‌طور که در بالا گفتیم اگر $a \mid b$ و $c \mid d$ باشند، می‌توانیم طرفین این دو رابطه را در هم ضرب کنیم:

$$\begin{cases} a \mid b \\ c \mid d \end{cases} \Rightarrow ac \mid bd$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} 5 \mid 3m+1 &\xrightarrow{\times} 35 \mid (3m+1)(9m+1) \Rightarrow 35 \mid 27m^2+12m+1 \\ 7 \mid 9m+1 &\end{aligned}$$

اما در هیچ کدام از گزینه‌ها ضریب m^2 برابر ۲۷ نیست؛ بنابراین:

$$\begin{aligned} 35 \mid 27m^2+12m+1 &\xrightarrow{(-)} 35 \mid 8m^2-12m-1 \\ 35 \mid 35m^2 &\end{aligned}$$

تست اگر $۱۱n - ۱ \mid ۳۶ \mid ۵n^2 + ۴n + a$ و a کوچک ترین مقدار طبیعی a کدام است؟

۳۵ (۴)

۲۵ (۳)

۱۱ (۲)

۱ (۱)

پاسخ گزینه «۴» روش اول: این مدل سؤالها در تمرینهای کتاب درسی آمده و یک مقدار سخت است. فکر کردم بد نیست یک نمونه این جا برایتان حل کنیم:

$$\begin{array}{l} ۱۱n - ۱ \mid ۳۶ \mid ۵n^2 + ۴n - ۱ \quad (I) \\ ۶ \mid ۶n \end{array}$$

$$\begin{array}{l} ۱۱n - ۱ \mid ۳۶ \mid ۵n^2 + ۴n - ۱ \quad (II) \\ ۶ \mid ۱۲n \end{array}$$

$$۳۶ \mid (۵n - ۱)(n + ۱) \Rightarrow ۳۶ \mid ۵n^2 + ۴n - ۱$$

با ضرب کردن دو رابطه (I) و (II) در هم داریم:

پس $۵n^2 + ۴n - ۱$ بر ۳۶ بخش پذیر است اما مشکل این جاست که -۱ طبیعی نیست؛ بنابراین:

$$\begin{array}{l} ۳۶ \mid ۵n^2 + ۴n - ۱ \xrightarrow{(+)} ۳۶ \mid ۵n^2 + ۴n + ۳۵ \\ ۳۶ \mid ۳۶ \end{array}$$

پس کوچک ترین مقدار a برابر ۳۵ است.

روش دوم: یک عدد کوچک n پیدا می کنیم که رابطه $۱۱n - ۱ \mid ۳۶ \mid ۵n^2 + ۴n + a$ به ازای آن برقرار باشد. با کمی دقت متوجه می شویم به ازای $n = -۱$ رابطه برقرار است. حالا اگر در رابطه $۳۶ \mid ۵n^2 + ۴n + a$ به جای n عدد -۱ را قرار دهیم، داریم:

$$۳۶ \mid ۵ - ۴ + a \Rightarrow ۳۶ \mid ۱ + a$$

مشخص است که کوچک ترین مقدار طبیعی a برابر ۳۵ است.

معادله های عادکردنی

یک مدل بسیار پرتکرار در سؤالهای بخش پذیری سؤالهایی مثل این است:

«به ازای چند عدد صحیح رابطه $۱ + ۵x \mid x - ۲$ برقرار است؟»

این مدل سؤالها را معادله های عادکردنی می نامیم. (پهن به پای تساوی علامت عادکردن داره!)

روش اصلی پاسخ گویی به این نوع سؤالها ضرب کردن سمت راست رابطه در یک عدد و یکسان کردن ضریبهاست. الان بیشتر توضیح می دهیم منظورمان چیست. بیایید همین سؤال بالا را با هم حل کنیم:

۱ می دانیم هر عددی خودش را عاد می کند. پس عبارت سمت چپ هم خودش را می شمارد.

۲ از طرفی دیدیم که می توانیم سمت راست عبارت عادکردنی را در هر عدد صحیحی که بخواهیم ضرب کنیم. سمت راست این رابطه را

در ۵ ضرب می کنیم. چرا در ۵ ؟ صورت سؤال را ببینید، ضریب x در عبارت $۱ + ۵x$ عدد ۵ است. به همین خاطر این را هم در ۵ ضرب می کنیم تا بعداً ضریبها ساده شود:

$$۱ + ۵x \mid x - ۲ \xrightarrow{۵ \times \text{سمت راست}} ۱ + ۵x \mid ۵x - ۱۰$$

۳ حالا از رابطه $a \mid b \Rightarrow a \mid b - c$ استفاده می کنیم و ضریب x را حذف می کنیم.

$$۱ + ۵x - ۱۰ \mid ۵x - ۱۰ - (۵x - ۱۰) \Rightarrow ۱ + ۵x - ۱۰ \mid ۰$$

$$\begin{array}{l} ۱ + ۵x - ۱۰ \mid ۰ \\ ۱ + ۵x - ۱۰ \mid ۱ + ۵x - ۱۰ \end{array}$$

رابطه صورت سؤال

۴ حالا که سمت راست یک عدد ثابت است، عبارت سمت چپ (عبارت x دار) می تواند هر کدام از مقسوم علیه های آن عدد ثابت باشد:

$$۱ + ۵x - ۱۰ \mid ۰ \Rightarrow \begin{cases} ۱ + ۵x - ۱۰ = ۱ \Rightarrow x = ۳ \\ ۱ + ۵x - ۱۰ = -۱ \Rightarrow x = ۱ \\ ۱ + ۵x - ۱۰ = ۱۱ \Rightarrow x = ۱۳ \\ ۱ + ۵x - ۱۰ = -۱۱ \Rightarrow x = -۹ \end{cases}$$

تست مجموع ارقام بزرگ ترین عددی که در رابطه $۱۸ + ۹x \mid ۲ - ۵x$ صدق می کند، کدام است؟

۴ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

پاسخ گزینه «۱»

$$\begin{array}{l} ۱۸ + ۹x \mid ۲ - ۵x \xrightarrow{\text{سمت راست } ۹x} ۱۸ + ۹x \mid ۲ - ۵x - ۹x - ۱۸ \\ ۱۸ + ۹x \mid ۲ - ۵x \xrightarrow{\text{سمت راست } ۵x} ۱۸ + ۹x \mid ۲ - ۵x + ۵x + ۳۵ \end{array}$$

$$\begin{array}{l} ۱۸ + ۹x \mid ۲ - ۵x \xrightarrow{\text{مجموع ارقام}} ۱ + ۱ = ۲ \\ \Rightarrow ۵x = ۵۵ \Rightarrow x = ۱۱ \end{array}$$

چون بزرگ ترین عدد را خواسته، خود ۵۳ را در نظر گرفتیم.

تست - به ازای چند عدد صحیح رابطه $yx + 8 = x^2 + 3y$ برقرار است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بیشتر از ۲

پاسخ - گزینه «۳» ابتدا رابطه را مرتب می‌کنیم:

$$yx + 8 = x^2 + 3y \Rightarrow yx - 3y = x^2 - 8 \Rightarrow y(x - 3) = x^2 - 8 \Rightarrow y = \frac{x^2 - 8}{x - 3}$$

حالا اگر قرار باشد y عددی صحیح باشد، باید کسر $\frac{x^2 - 8}{x - 3}$ عددی صحیح باشد؛ یعنی صورت آن بر مخرجش بخش پذیر باشد یا به بیان دیگر $x - 3 \mid x^2 - 8$.

$$x - 3 \mid x^2 - 8 \xrightarrow{\text{سمت راست } \times (x+3)} \left. \begin{array}{l} x - 3 \mid x^2 - 9 \\ x - 3 \mid x^2 - 8 \end{array} \right\} \xrightarrow{(-)} x - 3 \mid 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 3 = 1 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow y = 8 \\ x - 3 = -1 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 4 \end{cases}$$

نکته تستی

یک راه ساده‌تر برای پاسخ دادن به این سؤال‌ها این است که اگر عبارت سمت چپ ریشه داشت، ریشه آن را در عبارت سمت راست قرار دهیم تا به یک عدد ثابت برسیم. عبارت سمت چپ آن عدد ثابت را می‌شمارد.

برای مثال در مثالی که حل کردیم یعنی $x - 2 \mid 5x + 1$ اگر $x - 2 = 0$ باشد، $x = 2$ است که اگر آن را در عبارت $5x + 1$ قرار دهیم می‌شود $11 = 5 \times 2 + 1$ و عبارت سمت چپ یعنی $x - 2$ عاد می‌کند ۱۱ را و سؤال خیلی ساده‌تر حل می‌شود یا در این تست آخر داشتیم:

$$\begin{aligned} x - 3 \mid x^2 - 8 \\ x - 3 = 0 &\Rightarrow x = 3 \xrightarrow{\text{جای گذاری در } x^2 - 8} 9 - 8 = 1 \\ \Rightarrow x - 3 \mid 1 \end{aligned}$$

حواستون باشه! حتی اگر عبارت سمت چپ ریشه صحیح نداشت، باز هم می‌شود از نکته قبلی سؤال را حل کرد. کافی است ریشه عبارت سمت چپ را در عبارت سمت راست قرار دهیم و عبارت را ساده کنیم، در این صورت عبارت سمت چپ صورت کسر عبارت سمت راست را عاد می‌کند.

برای مثال به تست اولی که حل کردیم نگاه کنید:

$$\begin{aligned} 5x - 2 \mid 9x + 7 \\ 5x - 2 = 0 &\Rightarrow x = \frac{2}{5} \\ 9x + 7 &\xrightarrow{x = \frac{2}{5}} 9 \times \frac{2}{5} + 7 = \frac{18}{5} + 7 = \frac{18 + 35}{5} = \frac{53}{5} \\ 5x - 2 \mid 53 \end{aligned}$$

ریشه را در عبارت سمت راست قرار می‌دهیم و مخرج مشترک می‌گیریم:

حالا عبارت سمت چپ صورت کسر را عاد می‌کند:

اما گاهی اوقات این معادله‌های عاد کردن از روش‌های معمول حل نمی‌شوند.

تست - به ازای چند عدد صحیح n رابطه $n^2 - 1 \mid 2^n - 1$ برقرار است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

پاسخ - گزینه «۳» می‌دانیم به ازای n های بزرگ، رشد $2^n - 1$ از رشد $n^2 - 1$ بیشتر است؛ یعنی اگر کسر $\frac{n^2 - 1}{2^n - 1}$ را در نظر بگیریم، از یک جایی به بعد مخرج کسر از صورت کسر بزرگ‌تر می‌شود و رابطه دیگر برقرار نیست. پس فقط در n های کوچک رابطه برقرار است.

$$n = 1 \Rightarrow \frac{0}{0} = 0 \quad \checkmark \qquad n = 2 \Rightarrow \frac{3}{3} = 1 \quad \checkmark \qquad n = 3 \Rightarrow \frac{8}{7} \times$$

$$n = 4 \Rightarrow \frac{15}{15} = 1 \quad \checkmark$$

$$n = -1 \Rightarrow \frac{0}{-\frac{1}{2}}$$

$$n = 5 \Rightarrow \frac{24}{31} \times$$

غیر قابل قبول؛ چون بخش پذیری در $\mathbb{Z}$ تعریف می‌شود. پس برای اعداد صحیح منفی رابطه برقرار نیست.

و از $n \geq 5$ مخرج از صورت بیشتر می‌شود.



باقی‌مانده مربع عدد فرد در تقسیم به ۸

در درس قبل دیدیم که اگر x عددی فرد باشد، مربع آن را می‌توان به صورت $8k+1$ نوشت. از این ایده سؤال‌هایی در این بخش می‌آید که بد نیست با آن‌ها آشنا شویم.

$$x = 2q + 1 \Rightarrow x^2 = 4q^2 + 4q + 1 = 4q(q+1) + 1 = 4(2k) + 1 = 8k + 1$$

حاصل ضرب دو عدد متوالی
همواره زوج است.

تست اگر x و y دو عدد طبیعی باشند به طوری که $xy + x = 7^{17}$ باشد، باقی‌مانده $1 + 2y^3 + 3x^2$ بر ۸ کدام است؟

- ۱ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴)

پاسخ گزینه «۳» می‌دانیم 7^{17} عددی فرد است. حاصل ضرب دو عدد برابر عددی فرد شده ولی هر دو فردند:

$$xy + x = 7^{17} \Rightarrow x(y+1) = 7^{17} \Rightarrow \begin{cases} x \text{ فرد است.} \\ y+1 \text{ فرد است.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x^2 &= 8q + 1 \Rightarrow 3x^2 + 2y^3 + 1 = 3(8q+1) + 2(8q'+1) + 1 = 24q + 3 + 16q' + 1 = 24q + 16q' + 4 \\ y &= 2q' \Rightarrow y^3 = 8q'^3 \end{aligned}$$

مضرب ۸

تست اگر $a \mid 2^n + 1$ و $b \mid m^2 + m + 1$ باقی‌مانده $a^4 + b^4 + a^2b^2$ بر ۸ کدام است؟ (m و n اعداد طبیعی اند).

- ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر (۱)

پاسخ گزینه «۴» $2^n + 1$ عددی فرد است. همچنین $m^2 + m + 1 = \frac{m(m+1)}{2} + 1 = 2q + 1$ پس $m^2 + m + 1$ نیز فرد است. متوالی زوج عدد ضرب دو عدد.

بنابراین عدد فرد $a \mid$ و عدد فرد $b \mid$ پس a و b هیچ‌کدام نمی‌توانند عددی زوج باشند پس a و b هر دو فردند، بنابراین هر سه عبارت a^4 و b^4 و a^2b^2 مربع‌های عددهایی فردند، $(a^2)^2$ ، $(b^2)^2$ و $(ab)^2$ بنابراین:

$$a^4 + b^4 + a^2b^2 = 8q + 1 + 8q' + 1 + 8q'' + 1 = 8(q+q'+q'') + 3$$

مضرب ۸

سه اتحاد مهم در بخش پذیری

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1})$$

$$a-b \mid a^n - b^n$$

$$a+b \mid a^n + b^n$$

$$a+b \mid a^n - b^n$$

به این اتحاد نگاه کنید:

۱ از این‌جا می‌توان نوشت:

۲ همچنین اگر n فرد باشد می‌توان نوشت:

۳ و اگر n زوج باشد:

به بیان دیگر:

۱ $a^n + b^n$ زمانی بر $a+b$ بخش‌پذیر است که n فرد باشد.

۲ $a^n - b^n$ همواره بر $a-b$ بخش‌پذیر است اما اگر n زوج باشد $a^n - b^n$ بر $a+b$ نیز بخش‌پذیر است.

تست به ازای چند مقدار $n \leq 300$ رابطه $2^n + 1 \mid 33$ برقرار است؟

- ۲۹ (۱) ۳۰ (۲) ۵۹ (۳) ۶۰ (۴)

پاسخ گزینه «۲» با توجه به $2^n + 1$ در سمت راست رابطه، عدد ۳۳ شما را یاد چه توانی از ۲ می‌اندازد؟ بله: $33 = 32 + 1 = 2^5 + 1$

حالا به اتحادهایی که گفتیم فکر کنیم، کدامشان ساختاری شبیه صورت سؤال داده‌شده دارد؛ چون در هر ۲ طرف رابطه + داریم، پس باید از اتحاد مقابل کمک بگیریم:

$$2^5 + 1 \mid (2^5)^{2k+1} + 1^{2k+1} \Rightarrow 2^5 + 1 \mid 2^{10k+5} + 1$$

خب اگر $a = 2^5$ و $b = 1$ باشد، داریم:

چون n باید فرد باشد آن را به صورت $2k+1$ در نظر گرفتیم.

با مقایسه با صورت سؤال می‌توان فهمید $n = 10k + 5$ است. اما گفته $n \leq 300$ بنابراین:

$$0 \leq 10k + 5 \leq 300 \Rightarrow 0 \leq 10k \leq 295 \Rightarrow 0 \leq k \leq 29/5 \Rightarrow k = 0, 1, 2, \dots, 29$$



تست - عدد $۳۵۶ - ۲۲۸$ بر کدام یک از عددهای زیر بخش پذیر نیست؟

- (۱) ۳۵ (۲) ۹۱ (۳) ۱۱۹ (۴) ۱۸۷

پاسخ - گزینه «۲» اگر بخواهیم از اتحادهای گفته شده استفاده کنیم، توانها باید برابر باشند. بنابراین سعی می کنیم آنها را برابر کنیم:

$$۵۶ = ۲^۳ \times ۷ \quad ۲۸ = ۲^۲ \times ۷$$

$$۳۵۶ - ۲۲۸ = (۳^۴)^۱ - (۲^۲)^۴ = ۸۱^۴ - ۴^۴$$

۱۴ زوج است پس $۸۱^۴ - ۴^۴$ هم بر $۸۱ - ۴ = ۷۷$ بخش پذیر است. (یعنی هم بر ۷ و هم بر ۱۱) و هم بر $۸۱ + ۴ = ۸۵$ بخش پذیر است (یعنی هم بر ۵ و هم بر ۱۷).

حالا گزینه ها را بررسی می کنیم:

$$۳۵ = ۵ \times ۷ \quad \checkmark$$

$$۹۱ = ۷ \times ۱۳ \quad \times \text{ نه. بر } ۳۵۶ - ۲۲۸ \text{ بخش پذیر است اما بر } ۱۳ \text{ نه.}$$

$$۱۱۹ = ۷ \times ۱۷ \quad \checkmark$$

$$۱۸۷ = ۱۱ \times ۱۷ \quad \checkmark$$

قضیه بالا را به صورت زیر نیز می توان گفت که اگر n و t اعدادی صحیح باشند:

۱ اگر $\frac{n}{t}$ صحیح باشد: $a^t - b^t \mid a^n - b^n$

۲ اگر $\frac{n}{t}$ فرد باشد: $a^t + b^t \mid a^n + b^n$

۳ اگر $\frac{n}{t}$ زوج باشد: $a^t + b^t \mid a^n - b^n$

تست - به ازای چند عدد n از مجموعه $A = \{۳, ۶, ۹, \dots, ۹۹\}$ به $a^n + b^n$ به $a^۵ + b^۵$ بخش پذیر است؟

- (۱) ۳ (۲) ۶ (۳) ۹ (۴) ۱۰

پاسخ - گزینه «۱» طبق نکته گفته شده رابطه $a^۵ + b^۵ \mid a^n + b^n$ هنگامی برقرار است که $\frac{n}{۵}$ عددی فرد باشد، پس n مضرب فردی از ۵ است که عضو مجموعه A نیز هست، یعنی n هم مضرب فرد ۵ است هم مضرب ۳، پس n به صورت زیر است:

$$n = ۳^۰k + ۱۵ \Rightarrow n = ۱۵, ۴۵, ۷۵ \rightarrow \text{مقدار } ۳$$

بزرگترین مقسوم علیه مشترک

مجموعه مقسوم علیه های طبیعی دو عدد ۳۰ و ۴۵ را ببینید:

$$۳۰ = \{۱, ۲, ۳, ۵, ۶, ۱۰, ۱۵, ۳۰\}$$

$$۴۵ = \{۱, ۳, ۵, ۹, ۱۵, ۴۵\}$$

حالا مجموعه مقسوم علیه های مشترک این دو عدد را نگاه کنید:

$$۴۵ \text{ و } ۳۰ \text{ مشترک } = \{۱, ۳, ۵, ۱۵\}$$

که در میان آنها ۱۵ بزرگترین است.

اما خبر برای عددهای بزرگ نمی شود این کار را کرد. اما پیش از آن خوب است با تعریف ب.م.م که آن را در ریاضیات با d نشان می دهند، آشنا شویم:

حواستون باشه! عدد طبیعی d را ب.م.م دو عدد صحیح a و b می نامیم و می نویسیم: $(a, b) = d$

هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد: $d \mid a, d \mid b$ (این یعنی d مقسوم علیه هر دو a و b)

$$c \mid a, c \mid b \Rightarrow \begin{cases} c \leq d \\ c \mid d \end{cases} \quad (\text{این ویژگی تضمین می کنه } d \text{ کوچک ترینه})$$

۱ راه بهتر برای به دست آوردن ب.م.م دو عدد کافی است هر دو عدد را تجزیه کرده، عوامل مشترک را با توان بزرگتر در هم ضرب کنیم:

$$(۳۶۰, ۲۸۸) = (۲^۳ \times ۳^۲ \times ۵, ۲^۵ \times ۳^۲) = ۲^۳ \times ۳^۲ = ۷۲$$

$$(۳۵, ۲۴) = (۵ \times ۷, ۲^۳ \times ۳) = ۱$$

۲ اگر ب.م.م دو عدد برابر ۱ باشد، آن دو عدد را نسبت به هم اول می گویند.

تست - اگر $(۲^{\alpha} \times ۳^{\beta}, ۳۶۰) = ۳۶$ باشد، کدام گزینه در مورد α و β درست است؟

$$\alpha = ۲ \text{ و } \beta \geq ۲ \quad \alpha = \beta = ۲$$

$$\alpha \geq ۲, \beta \geq ۲ \quad \alpha \geq ۲, \beta = ۲$$

پاسخ- گزینه «۲» گفتیم برای پیدا کردن ب.م.م دو عدد باید هر دو عدد را تجزیه کرده عوامل مشترک را با توان کوچک‌تر در هم ضرب کنیم. داریم:

$$(2^\alpha \times 3^\beta, 2^3 \times 3^2 \times 5) = 2^2 \times 3^2$$

α باید حتماً ۲ باشد وگرنه در ب.م.م دو عدد ۲ دیده نمی‌شود. (پهن اون یکی ۲ داره!)
در توان‌های ۳ باید $\min\{\beta, 2\} = 2$ باشد، بنابراین β حداقل برابر ۲ است اما هر مقداری می‌تواند داشته باشد یعنی $\beta \geq 2$.

تست- اگر $(x, 600) = 100$ باشد، حاصل $(x^2, 100000)$ کدام است؟

- (۱) همواره ۱۰۰۰۰۰ (۲) همواره ۲۰۰۰۰۰ (۳) ۵۰۰۰۰۰ یا ۱۰۰۰۰۰ (۴) ۲۰۰۰۰۰ یا ۵۰۰۰۰۰

پاسخ- گزینه «۳» اول عددها را تجزیه می‌کنیم تا بفهمیم چه خبر است:

$$(x, 600) = 100 \Rightarrow (x, 2^3 \times 3 \times 5^2) = 2^2 \times 5^2$$

پس x عامل ۳ ندارد (وگرنه تو ب.م.م می‌اومد) دارای دو عامل ۲ است (پهن آله بیشتر داشت تو ب.م.م می‌اومد) و دارای دست کم دو عامل ۵ است. (پهن اون یکی دو تا ۵ داره، تو ب.م.م هم ۲ تا ۵ تها) (پس این می‌تونه هر عدد بیشتر از ۲ باشه.)

پس فرم کلی x به صورت روبه‌رو است:

$$x = 2^2 \times 5^\alpha, \alpha \geq 2$$

(البته ممکن است x عامل‌های دیگری هم داشته باشد ولی چون ۱۰۰۰۰۰ فقط عامل ۲ و ۵ دارد بقیه مهم نیستند.)

حالا ب.م.م $(x^2, 100000)$ را پیدا می‌کنیم:

$$(x^2, 100000) = (2^4 \times 5^{2\alpha}, 2^5 \times 5^5)$$

خب در توان‌های ۲ که کار مشخص است چون ۴ و ۵ داریم که مینیمم ۴ می‌شود. اما در مورد توان‌های ۵ باید ۲ حالت در نظر بگیریم.

$$\alpha = 2 \Rightarrow (2^4 \times 5^{2\alpha}, 2^5 \times 5^5) = (2^4 \times 5^4, 2^5 \times 5^5) = 2^4 \times 5^4 = 10000$$

$$\alpha = 3 \Rightarrow (2^4 \times 5^{2\alpha}, 2^5 \times 5^5) = (2^4 \times 5^6, 2^5 \times 5^5) = 2^4 \times 5^5 = 50000$$

تست- اگر $(n, 21) = 7$ باشد، فرم کلی n بر حسب متغیر $k \in \mathbb{Z}$ کدام است؟

$$n = 21k + 7 \quad (1) \quad n = 7k$$

$$n = 21k + 7 \quad (2) \quad n = 14k + 7 \quad (3) \quad n = 21k + 7 \quad (4) \quad n = 14k + 7 \quad (5)$$

پاسخ- گزینه «۳» با توجه به این که $(n, 21) = 7$ پس n عامل ۳ ندارد ولی بر ۷ بخش‌پذیر است؛ یعنی $n = 7q$ ولی بر ۳ بخش‌پذیر نیست بنابراین q یا به صورت $3k+1$ است یا به صورت $3k+2$ ، پس:

$$n = 7(3k+1) = 21k+7 \quad \text{یا} \quad n = 7(3k+2) = 21k+14$$

تست- به ازای چند عدد طبیعی کوچک‌تر از ۱۵۰ مانند n دو عدد $n-3$ و n^2+3n+1 نسبت به هم اول‌اند؟ ($n \in \mathbb{N}$)

- (۱) ۱۴۲ (۲) ۱۴۳ (۳) ۱۴۸ (۴) ۱۴۹

پاسخ- گزینه «۱» روش اول: ب.م.م دو عدد را d می‌نامیم. با توجه به ویژگی اول ب.م.م داریم:

$$d \mid n-3 \xrightarrow{\times n} d \mid n^2-3n \xrightarrow{(-)} d \mid n^2+3n+1$$

حالا دوباره:

$$d \mid n-3 \xrightarrow{\times 6} d \mid 6n-18 \xrightarrow{(-)} d \mid 19 \Rightarrow d = 1 \text{ یا } 19$$

می‌خواهیم ب.م.م ۱ باشد؛ بنابراین حالت‌هایی که ب.م.م ۱۹ است قابل قبول نیست. بنابراین باید حالت‌هایی که عددها بر ۱۹ بخش‌پذیرند را پیدا کرده از کل عددها کم کنیم.

$$n-3 = 19k \Rightarrow n = 19k+3 < 150 \Rightarrow 0 \leq 19k < 147 \Rightarrow 0 \leq k < 7/19 \Rightarrow k = 0, 1, 2, \dots, 7$$

یعنی به ازای ۸ عدد ب.م.م برابر ۱۹ می‌شود پس به ازای $142 - 7 = 149$ عدد ب.م.م برابر ۱ است و دو عدد نسبت به هم اول‌اند.

(هواستون باشه: $[a, 0] = |a|$)

روش دوم: در این نوع سؤال‌ها هم می‌شود ریشه یکی از عبارت‌ها را در دیگری قرار داد. در این صورت d آن مقدار را عاد می‌کند:

و بقیه پاسخ مثل روش اول است.

$$n-3 = 0 \xrightarrow{\text{جاگذاری در عبارت دیگر}} 3^2 + 3 \times 3 + 1 = 19 \Rightarrow d \mid 19$$

روش نردبانی برای به دست آوردن ب.م.م دو عدد: گفتیم بهترین روش پیدا کردن ب.م.م تجزیه دو عدد و ضرب کردن عوامل مشترک با توان کوچک‌تر در هم است. اما گاهی عددها خوب تجزیه نمی‌شوند. در این صورت می‌توانیم از روش نردبانی ب.م.م دو عدد را پیدا کنیم. در این روش از جدول زیر استفاده می‌کنیم. سطر اول مربوط به خارج قسمت‌ها، سطر دوم مربوط به دو عدد و سطر سوم مخصوص باقی‌مانده‌هاست. عددها را به ترتیب نزولی در سطر وسط قرار می‌دهیم و بر هم تقسیم می‌کنیم. خارج قسمت را در سطر بالایی و باقی‌مانده را در سطر پایینی می‌گذاریم. اگر باقی‌مانده صفر بود، عدد آخر ب.م.م است وگرنه باقی‌مانده را به سطر وسط منتقل می‌کنیم و دوباره الگوریتم را تکرار می‌کنیم.



برای درک بهتر به تست زیر نگاه کنید:

تست - مجموع ارقام بزرگ‌ترین شمارنده مشترک دو عدد ۴۳۷ و ۲۵۳ کدام است؟

(۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

پاسخ - گزینه «۲» چون تجزیه عددها آسان نیست، برای پیدا کردن ب.م.م از روش نردبانی استفاده می‌کنیم:

(۱) اول ۴۳۷ را بر ۲۵۳ تقسیم می‌کنیم:

۲	۱	۲	۱	۱	۹
۲۳	۴۶	۶۹	۱۸۴	۲۵۳	۴۳۷
۰	۲۳	۴۶	۶۹	۱۸۴	۲

$$437 \overline{) 253}$$

$$\underline{253} \quad 1$$

باقی‌مانده می‌رود سطر وسط $\rightarrow 184$

(۲) حالا ۲۵۳ را بر ۱۸۴ تقسیم می‌کنیم:

$$253 \overline{) 184}$$

$$\underline{184} \quad 1$$

باقی‌مانده دوباره می‌رود سطر وسط $\rightarrow 69$

$$184 \overline{) 69}$$

$$\underline{138} \quad 2$$

باقی‌مانده دوباره می‌رود سطر وسط $\rightarrow 46$

$$69 \overline{) 46}$$

$$\underline{46} \quad 1$$

$$\underline{23}$$

$$2+3=5$$

(۴) ۶۹ را بر ۴۶ تقسیم می‌کنیم:

(۵) ۴۶ بر ۲۳ بخش‌پذیر است پس ب.م.م ۲۳ است.

کوچک‌ترین مضرب مشترک

$$[a, b] = c$$

c را کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد a و b می‌گوییم و می‌نویسیم:

۱ $a|c$ و $b|c$ (یعنی c بر هر دو عدد اعداد بخش‌پذیر است)

هرگاه:

۲ $\forall m > 0; a|m, b|m \Rightarrow \begin{cases} c \leq m \\ c|m \end{cases}$ (این ویژگی تضمین می‌کند که کوچک‌ترین است)

یادتان هست کمی قبل ب.م.م دو عدد ۳۰ و ۴۵ را پیدا کردیم؟ الان ک.م.م.شان را پیدا می‌کنیم:

$$30 = \{30, 60, 90, 120, 150, 180, 210, \dots\}$$

$$45 = \{45, 90, 135, 180, 225, \dots\}$$

$$45 \text{ و } 30 \text{ مشترک مضارب} = \{90, 180, 270, \dots\}$$

اما خوب واضح است که این راه خوبی نیست. برای پیدا کردن ک.م.م دو یا چند عدد بهتر است از روش زیر استفاده کنیم.

حواستون باشه! برای پیدا کردن ک.م.م دو یا چند عدد، عددها را تجزیه می‌کنیم، سپس عوامل مشترک را با توان بزرگ‌تر در عوامل

غیرمشترک ضرب می‌کنیم.

$$[30, 45] = [2 \times 3 \times 5, 3^2 \times 5] = 2 \times 3^2 \times 5 = 90$$

برای مثال:

$$[54, 60] = [2 \times 3^3, 2^2 \times 3 \times 5] = 2^2 \times 3^3 \times 5 = 540$$

تست - اگر $[a, 20] = 120$ باشد، کدام گزینه درست نیست؟

(۲) a بر ۳ بخش‌پذیر است اما بر ۹ بخش‌پذیر نیست.

(۱) a بر ۸ بخش‌پذیر است اما بر ۱۶ بخش‌پذیر نیست.

(۴) کوچک‌ترین مقدار طبیعی a دورقمی است.

(۳) a بر ۵ بخش‌پذیر است اما بر ۲۵ بخش‌پذیر نیست.

$$[a, 2^2 \times 5] = 2^3 \times 3 \times 5$$

پاسخ - گزینه «۳» داریم:

در ک.م.م ۲۳ داریم پس a حتماً بر ۲۳ بخش‌پذیر است اما بر ۲۴ بخش‌پذیر نیست به دلیل این‌که در آن صورت در ک.م.م هم ۲۴ می‌آمد پس

گزینه (۱) درست است.

a حتماً عامل ۳ دارد چون ۳ در ک.م.م آمده اما بر ۹ نمی‌تواند بخش پذیر باشد. چون در آن صورت در ک.م.م هم 3^2 می‌آمد پس گزینه (۲) درست است. چون $20 = 2^2 \times 5$ و در ک.م.م هم فقط یک عامل ۵ وجود دارد، پس a ممکن است اصلاً بر ۵ بخش پذیر نباشد پس گزینه (۳) درست نیست. (البته ممکنه به ۵ داشته باشه اما نمی‌تونیم بگیریم هتماً ۵ داره!)
 a دارای دست کم ۳ عامل ۲ و یک عامل ۳ است پس $a_{\min} = 2^3 \times 3 = 24$ پس گزینه (۴) درست است.

ویژگی‌های ب.م.م و ک.م.م

(اگر دو تا عدد داشته باشیم که یکی اون یکی رو عاد می‌کنه ب.م.م می‌شه اون یکی که قهرمطلقش کوچک تره و ک.م.م می‌شه اون یکی.)

$$1 \quad a | b \Rightarrow \begin{cases} (a, b) = |a| \\ [a, b] = |b| \end{cases}$$

$$2 \quad \begin{cases} (a, b) = (a, -b) = (-a, b) = (-a, -b) \\ [a, b] = [a, -b] = [-a, b] = [-a, -b] \end{cases}$$

(علامت منفی تو ب.م.م و ک.م.م هیچ تأثیری نداره.)

$$3 \quad \begin{cases} (ka, kb) = |k| (a, b) \\ [ka, kb] = |k| [a, b] \end{cases}$$

(هرفا تونستی فاکتور بگیري بگیر!)

$$4 \quad (a, b) = d \Rightarrow (a, b \pm ak) = d$$

(اگر هر مفبری از یکی از عددها رو به اون یکی اضافه و یا ازش کم کنیم ب.م.م تغییری نمی‌کنه.)

$$\text{برای مثال } [30, 45] = [30, 45 + 2 \times 30] = [30 - 3 \times 45, 45] = 90$$

$$5 \quad (a, b)[a, b] = |ab|$$

(ضرب ب.م.م دو تا عدد تو ک.م.م شون می‌شه قهرمطلق حاصل ضرب دو عدد.)

$$\begin{aligned} (30, 45) &= 15 \\ [30, 45] &= 90 \Rightarrow 30 \times 45 = 15 \times 90 \end{aligned}$$

برای مثال:

تست: حاصل $((a, [a, b]), [a^2, (a, b)])$ کدام است؟

$$(a, b) \quad (1) \quad a \quad (2) \quad [a, b] \quad (3) \quad |a| \quad (4)$$

پاسخ: گزینه «۴» یک چیزی را همیشه یادتان باشد، ک.م.م دو تا عدد بر هر دو عدد بخش پذیر است و هر دو عدد بر ب.م.م نشان بخش پذیرند. حالا برویم سراغ حل سؤال:

$$\left. \begin{aligned} a | [a, b] &\Rightarrow (a, [a, b]) = |a| \\ (a, b) | a, a | a^2 &\Rightarrow (a, b) | a^2 \Rightarrow [a^2, (a, b)] = a^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (|a|, a^2) = |a|$$

حواستان باشد ممکن است a منفی باشد، پس گزینه (۲) همیشه درست نیست.

تست: اگر دو عدد a و b نسبت به هم اول باشند، حاصل $(\gamma a + \epsilon b, \delta a + \zeta b)$ کدام است؟

$$\gamma \text{ یا } \epsilon \quad (4) \quad 3 \text{ یا } 1 \quad (3) \quad 2 \text{ یا } 1 \quad (2) \quad 1 \text{ همواره} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه «۱» برای پاسخ گویی از آن ویژگی ب.م.م استفاده می‌کنیم که $(a, b) = d \Rightarrow (a, b \pm ak) = d$

یعنی هر مضربی از یکی را می‌توان به دیگری اضافه یا از آن کم کرد.

(۱) عبارت سمت راست را نگه می‌داریم و عبارت سمت چپ را منهای عبارت سمت راست می‌کنیم.

$$(\gamma a + \epsilon b, \delta a + \zeta b) = ((\gamma a + \epsilon b) - (\delta a + \zeta b), \delta a + \zeta b) = (\gamma a + b, \delta a + \zeta b)$$

(۲) حالا عبارت سمت چپ را نگه می‌داریم و عبارت سمت راست را منهای دو برابر عبارت سمت چپ می‌کنیم:

$$= (\gamma a + b, (\delta a + \zeta b) - 2(\gamma a + b)) = (\gamma a + b, a + b)$$

$$(\gamma a + b - (a + b), a + b) = (a, a + b)$$

(۳) حالا راستی را نگه می‌داریم و چپی را منهای راستی می‌کنیم:

$$(a, a + b) = (a, a + b - a) = (a, b) = 1$$

(۴) و بالاخره a را نگه می‌داریم و $a + b$ را منهای a می‌کنیم:

روش دوم: این سؤال را می‌توان با نکته زیر نیز حل کرد:

■ اگر a و b دو عدد صحیح باشند به طوری که $(a, b) = d$ باشد، آن گاه اگر x, y, z, t اعداد صحیح باشند، داریم:

$$(xa + yb, za + tb) \mid \begin{vmatrix} x & y \\ z & t \end{vmatrix} d$$

حال برای حل سؤال داریم:

$$(\gamma a + \epsilon b, \delta a + \zeta b) \mid \begin{vmatrix} \gamma & \epsilon \\ \delta & \zeta \end{vmatrix} \times 1 \Rightarrow (\gamma a + \epsilon b, \delta a + \zeta b) \mid 1 \Rightarrow (\gamma a + \epsilon b, \delta a + \zeta b) = 1$$



تست - حاصل $(20m + 2, 30m + 8)$ کدام است؟

- (۱) همواره ۲ (۲) ۱ یا ۲ (۳) ۲ یا ۱۰ (۴) همواره ۱۰
- پاسخ - گزینه «۱»** اول از همه خوب است از یک ۲ فاکتور بگیریم:

حالا فرض می‌کنیم $d = (10m + 1, 15m + 4)$ باشد، در این صورت:

$$\left. \begin{array}{l} d \mid 10m + 1 \xrightarrow{\times 3} d \mid 30m + 3 \\ d \mid 15m + 4 \xrightarrow{\times 2} d \mid 30m + 8 \end{array} \right\} \xrightarrow{(-)} d \mid 5 \Rightarrow d = 1 \text{ یا } 5$$

اما دقت کنید d نمی‌تواند برابر ۵ باشد چون $10m + 1$ و $15m + 4$ نمی‌توانند بر ۵ بخش‌پذیر باشند پس فقط $d = 1$ قابل قبول است و چون از یک ۲ فاکتور گرفته بودیم پاسخ همواره ۲ است.

متابین‌سازی

در سؤال‌های متابین‌سازی معمولاً دو رابطه (گاهی هم یک رابطه ترکیبی) از ب.م.م، ک.م.م، مجموع یا حاصل ضرب دو عدد داده می‌شود و باید عددها را پیدا کنیم.

نکته کلیدی پاسخ‌گویی به این سؤال‌ها نکته زیر است:

$$(a, b) = d \xrightarrow{\div d} \left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d} \right) = 1$$

۱ $\frac{a}{d} = a' \Rightarrow a = a'd$

$\frac{a}{d}$ ام را a' و $\frac{b}{d}$ ام را b' می‌نامیم، بنابراین:

۲ $\frac{b}{d} = b' \Rightarrow b = b'd$

۳ $(a', b') = 1$

۴ $[a, b] = [a'd, b'd] = d[a', b'] = a'b'd$

حالا در این سؤال‌ها هر چیزی به ما بدهند را برحسب d ، b' و a' بازنویسی می‌کنیم:

۵ $a + b = a'd + b'd = d(a' + b')$

۶ $ab = (a'd)(b'd) = a'b'd^2$

حالا سؤال‌های زیر را حل کنید تا با ایده‌های متابین‌سازی بیشتر آشنا شوید:

تست - اگر $(a, b) = 7$ و $a + b = 56$ باشد، حداکثر $[a, b]$ کدام است؟

- (۱) ۴۹ (۲) ۸۴ (۳) ۱۰۵ (۴) ۱۱۲
- پاسخ - گزینه «۳»**

$$(a, b) = 7 \Rightarrow d = 7$$

$$a + b = 56 \Rightarrow d(a' + b') = 56 \Rightarrow a' + b' = 8$$

۱	۷	✓
۲	۶	×
۳	۵	✓
۴	۴	×

دقت کنید $(a', b') = 1$ است پس دو حالت قابل قبول نیست. حالا می‌خواهیم $[a, b]$ حداکثر شود پس باید حالتی را در نظر بگیریم که حاصل ضرب $a'b'$ بیشتر شود، پس ۵ و ۳ را در نظر می‌گیریم:

$$[a, b] = a'b'd = 5 \times 3 \times 7 = 105$$

تست - اگر $a + b = 117$ و $[a, b] = 260$ باشد، کدام گزینه درست است؟ ($a > b$)

- (۱) $a - b$ زوج است. (۲) $a - b$ مضرب ۳ است. (۳) $a - b$ عددی اول است. (۴) a و b دو عدد متوالی‌اند.

$$a + b = 117 \Rightarrow d(a' + b') = 117 \quad (I)$$

$$[a, b] = 260 \Rightarrow a'b'd = 260 \quad (II)$$

$$\frac{(I)}{(II)} = \frac{(a' + b')d}{a'b'd} = \frac{117}{260}$$

با تقسیم دو رابطه داریم:

$$\frac{a' + b'}{a'b'} = \frac{9}{20} \Rightarrow \begin{cases} a' + b' = 9 \\ a'b' = 20 \end{cases} \xrightarrow{\text{وقتی } a > b \text{ پس } a' > b' \text{ می‌شود.}} a' = 5, b' = 4$$

d را از صورت و مخرج ساده می‌کنیم:

با جای‌گذاری در یکی از رابطه‌ها d هم پیدا می‌شود. هر چند وقتی طرفین $\frac{117}{260}$ را به ۱۳ ساده کردیم، معلوم بود $d = 13$ است، ولی با این حال:

$$a'b'd = 260 \Rightarrow 5 \times 4 \times d = 260 \Rightarrow d = 13 \Rightarrow a = 65, b = 52 \Rightarrow a - b = 13$$



اعداد اول

اعداد اول را که همه می‌دانند چیست! عددهایی هستند که در میان اعداد طبیعی فقط بر خودشان و ۱ بخش‌پذیر باشند. همین اول کار دوتا تست ببینید تا بعد نکته‌هایش را با هم مرور کنیم:

تست ۱- اگر a, b, c سه عدد اول باشند به طوری که $a < b < c$ و $a + b + c = ۲۰۶$ باشد، مجموع ارقام $a^2b + a^2c$ کدام است؟

۱۲ (۱) ۱۳ (۲) ۱۴ (۳) ۱۵ (۴)

پاسخ - گزینه «۴» می‌دانیم همه عددهای اول به جز ۲ فردند. از طرفی مربع سه عدد فرد، عددی فرد می‌شود اما این‌جا $a + b + c$ زوج است. پس یکی از آن‌ها حتماً زوج است و چون هر سه اول‌اند، کوچک‌ترین آن‌ها یعنی $a = ۲$ است. حالا:

$$a + b + c = ۲۰۶ \Rightarrow ۲ + b + c = ۲۰۶ \Rightarrow b + c = ۲۰۴$$

$$a^2b + a^2c = a^2(b + c) = ۴ \times (۲۰۴) = ۸۱۶ \Rightarrow \text{مجموع ارقام} = ۸ + ۱ + ۶ = ۱۵$$

تست ۲- اگر a و b دو عدد طبیعی و p عددی اول باشد به طوری که $a^2 = p + b^2$ و $ab = ۴۲۰$ باشد، $۲a + ۳b$ کدام است؟

۱۰۱ (۱) ۱۰۲ (۲) ۱۰۳ (۳) ۱۰۴ (۴)

پاسخ - گزینه «۲» حاصل ضرب دو عدد برابر عددی اول شده پس یکی ۱ و دیگری p است.

$$\begin{cases} a - b = 1 \\ a + b = p \end{cases} \Rightarrow a = \frac{p+1}{2}, b = \frac{p-1}{2} \Rightarrow ab = \frac{p^2-1}{4} = ۴۲۰$$

$$\Rightarrow p^2 - 1 = ۱۶۸۰ \Rightarrow p^2 = ۱۶۸۱ \Rightarrow p = ۴۱$$

$$\Rightarrow a = \frac{۴۱+1}{2} = ۲۱, b = \frac{۴۱-1}{2} = ۲۰ \Rightarrow ۲a + ۳b = ۲ \times ۲۱ + ۳ \times ۲۰ = ۱۰۲$$

چند نکته در مورد اعداد اول

$$\left. \begin{array}{l} ۶k \Rightarrow \text{زوج} \\ ۶k+۱ \\ ۶k+۲ \Rightarrow \text{زوج} \\ ۶k+۳ \Rightarrow \text{مضرب } ۳ \\ ۶k+۴ \Rightarrow \text{زوج} \\ ۶k+۵ \end{array} \right\} \Rightarrow p = ۶k+۱ \text{ یا } ۶k+۵$$

۱ هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ در تقسیم به ۶ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ یا ۵ دارد.

یا برای راحتی کار $p = ۶k \pm ۱$.

$$p > ۳ \Rightarrow p^2 = ۲۴k + ۱$$

۲ مربع هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ در تقسیم به ۲۴ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارد.

۳ هیچ‌کدام از عددهای بزرگ‌تر از $n! + ۱$ و کوچک‌تر یا مساوی $n! + n$ اول نیستند. برای مثال همه عددهای بزرگ‌تر از $۲۰! + ۱$ و کوچک‌تر یا مساوی $۲۰! + ۲۰$ مرکب‌اند. برای مثال $۲۰! + ۱۳ = ۲۰ \times ۱۹ \times \dots \times ۱۳ \times \dots \times ۲ \times ۱ + ۱۳$ بر ۱۳ بخش‌پذیر است.

۴ اگر $a \mid bc$ و a, c باشند آنگاه $a \mid b$. این هم واضح است؛ فرض کنید $a \mid ۳b$ و $a \mid ۳$ باشد. الان باید کسر $\frac{۳b}{a}$ عددی صحیح شود، a را که با ۳ نمی‌شود ساده کرد، پس b باید بر a بخش‌پذیر باشد یا $a \mid b$.

۵ تعداد اعداد اول نامتناهی است.

تست ۳- حاصل کدام‌یک از عبارت‌های زیر به ازای هیچ مقدار $n \in \mathbb{N}$ عدد اول نمی‌شود؟

$n^3 + ۲۷$ (۴) $n^2 - ۵n + ۸$ (۳) $n^3 - ۸$ (۲) $۵n + ۱$ (۱)

پاسخ - گزینه «۴» $۵n + ۱$ که مشخص است به ازای عددهای زیادی اول می‌شود، برای مثال اگر $n = ۲$ باشد، $۵n + ۱ = ۱۱$ می‌شود. پس گزینه (۱) پاسخ سؤال نیست.

این عبارت حاصل ضرب دو عدد مختلف است و به نظر می‌رسد ضرب دو عدد هیچ‌گاه اول نمی‌شود اما اگر $n = ۳$ باشد، $n - ۲ = ۱$ و $n^2 - ۵n + ۸ = ۱۹$ می‌شود و حاصل اول است. پس گزینه (۲) نیز پاسخ سؤال نیست.

اگر n فرد باشد، n^2 و $۵n$ هر دو فرد می‌شوند؛ پس $n^2 - ۵n + ۸$ زوج می‌شود. اگر n زوج باشد نیز $n^2 - ۵n + ۸$ همواره زوج است؛ اما ممکن است حاصل برابر ۲ شود که یک عدد اول است.

$$n^2 - ۵n + ۸ = ۲ \Rightarrow n^2 - ۵n + ۶ = ۰ \Rightarrow (n-۳)(n-۲) = ۰ \Rightarrow n = ۳$$

اگر بررسی کنیم، داریم:

یعنی به ازای $n = ۳$ حاصل برابر ۲ می‌شود که عددی اول است. پس گزینه (۳) نیز پاسخ سؤال نیست.

$$n^3 + ۲۷ = (n+۳)(n^2 - ۳n + ۹)$$

حاصل $n^3 + ۲۷$ ولی هیچ‌گاه عدد اول نمی‌شود زیرا:

حاصل ضرب دو عدد است که هیچ‌کدام به ازای هیچ مقدار طبیعی n برابر ۱ نمی‌شود. بنابراین ضرب دو عدد بزرگ‌تر از ۱ است که هیچ‌گاه اول نیست.



تست - اگر p عددی اول باشد، به ازای چند مقدار p عبارت $p^4 + p^2 + 1$ عددی اول می‌شود؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بیشتر از ۲

پاسخ - گزینه «۱» گفتیم مربع هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ را می‌توان به صورت $24k + 1$ نوشت، بنابراین:

$$p = 2 \Rightarrow p^4 + p^2 + 1 = 16 + 4 + 1 = 21 \quad \text{اول نیست.}$$

$$p = 3 \Rightarrow p^4 + p^2 + 1 = 81 + 9 + 1 = 91 \quad \text{اول نیست.}$$

$$p > 3 \Rightarrow (24k + 1)^2 + 24k + 1 + 1 = (24k)^2 + 72k + 3 \quad \text{همواره مضرب ۳ است بنابراین اول نیست.}$$

قضیه تقسیم و کاربردها

در تقسیم عدد صحیح a بر عدد طبیعی b اگر q خارج قسمت و r باقی‌مانده باشد، داریم:

$$\begin{array}{l} \text{مقسوم‌علیه} \rightarrow a \mid b \\ \text{خارج قسمت} \rightarrow q \\ \text{باقی‌مانده} \rightarrow r \end{array}$$

$$a = bq + r \quad 0 \leq r < b$$

تست - در تقسیم عدد a بر b اگر 221 واحد به a اضافه شود، خارج قسمت و باقی‌مانده هر کدام m واحد اضافه می‌شوند، b کدام است؟ ($m > 1$)

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۳ (۳) ۱۶ (۴) نمی‌توان گفت.

$$a = bq + r \quad (I) \quad 0 \leq r < b$$

$$a + 221 = b(q + m) + (r + m) \quad (II) \quad 0 \leq r + m < b$$

$$(II) - (I): 221 = mb + m \Rightarrow 221 = m(b + 1) \Rightarrow 13 \times 17 = m(b + 1)$$

حالا اگر دو رابطه را از هم کم کنیم داریم:

با توجه به شرط باقی‌مانده می‌دانیم $b > m$ است، پس $m = 13$ و $b + 1 = 17$ و در نتیجه $b = 16$ است.

تست - چند عدد دورقمی طبیعی وجود دارد که در تقسیم به ۹ خارج قسمت آن مضرب ۴ و باقی‌مانده آن مضرب ۵ باشد؟

- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۲

پاسخ - گزینه «۱» عدد a را فرض می‌کنیم، چون خارج قسمت مضرب ۴ است، آن را $4q$ فرض می‌کنیم. داریم:

$$a \mid 9 \quad 4q \Rightarrow a = 36q + r, 0 \leq r < 9$$

باقی‌مانده مضرب ۵ است، پس باقی‌مانده یا صفر است یا ۵. در هر دو حالت عددهای دورقمی را پیدا می‌کنیم:

$$\Rightarrow a = 36q \Rightarrow a = 36, 72 \quad \text{یا} \quad a = 36q + 5 \Rightarrow a = 41, 77$$

تست - در تقسیم عددهای a و b بر ۱۴ باقی‌مانده‌ها به ترتیب برابر ۲ و ۱۱ و خارج قسمت‌ها q و q' اند. باقی‌مانده تقسیم $6a + 3b$ بر ۲۱ برابر

..... و خارج قسمت آن برابر است.

- (۱) $2q + q' + 1$ و (۲) $4q + 2q' + 2$ (۳) $2q + q' + 1$ و (۴) $4q + 2q' + 2$

پاسخ - گزینه «۴»

$$a = 14q + 2 \xrightarrow{\times 6} 6a = 84q + 12 \quad b = 14q' + 11 \xrightarrow{\times 3} 3b = 42q' + 33 \quad \xrightarrow{+} \quad 6a + 3b = 84q + 42q' + 45$$

$$b = 14q' + 11 \xrightarrow{\times 3} 3b = 42q' + 33$$

$$= 21(4q + 2q') + 45 = 21(4q + 2q' + 2) + 3$$

در سؤال‌های بخش‌پذیری گاهی لازم می‌شود باقی‌مانده یک عدد منفی را بر یک عدد مثبت پیدا کنیم. دو روش برای انجام این کار وجود دارد. فرض کنید a عددی منفی است و می‌خواهیم باقی‌مانده آن را بر عدد b به دست آوریم:

۱ می‌توانیم اول خارج قسمت را با دستور $q = \left[\frac{a}{b} \right]$ پیدا کنیم و سپس باقی‌مانده را از رابطه $r = a - bq$ به دست آوریم.

۲ باقی‌مانده $|a|$ را بر b پیدا کنیم و آن را r' می‌نامیم. در این صورت باقی‌مانده a بر b برابر است با:

برای مثال اگر بخواهیم باقی‌مانده -28 را بر 5 به دست آوریم داریم:

$$q = \left[\frac{-28}{5} \right] = \left[-5.6 \right] = -6 \Rightarrow r = -28 - 5 \times -6 = 2$$

روش اول:

$$\begin{array}{l} 28 \mid 5 \\ -25 \quad 5 \Rightarrow r' = 3 \Rightarrow r = 5 - 3 = 2 \\ \hline 3 \end{array}$$

روش دوم:



تست اگر $a = 15q + 13$ باشد، باقی مانده و خارج قسمت $4a - 93$ بر 20 کدام است؟

- (۱) $3q - 2$ (۲) $3q - 3$ (۳) 19 و $3q - 2$ (۴) $3q - 3$ و 19

$$a = 15q + 13 \Rightarrow 4a - 93 = 4(15q + 13) - 93 = 60q - 41$$

پاسخ گزینه «۴»

برای پیدا کردن باقی مانده توجه کنید $60q$ بر 20 بخش پذیر است، پس باید باقی مانده -41 را بر 20 پیدا کنیم:

$$41 \overline{) 20}$$

$$\frac{40}{1} \Rightarrow r = 20 - 1 = 19$$

$$\left[\frac{60q - 41}{20} \right] = [3q - 2.05] = 3q - 3$$

و برای خارج قسمت:

تست اگر باقی مانده تقسیم a بر 5 برابر 1 باشد، باقی مانده تقسیم $2a + 1$ بر 30 حداکثر برابر چند است؟

- (۱) 21 (۲) 23 (۳) 24 (۴) 27

$$a = 5q + 1 \Rightarrow 2a + 1 = 10q + 3$$

پاسخ گزینه «۲» باقی مانده a در تقسیم به 5 برابر 1 است؛ بنابراین:

$$q = 3k \Rightarrow 2a + 1 = 30k + 3 \Rightarrow r = 3$$

$$q = 3k' + 1 \Rightarrow 2a + 1 = 10(3k' + 1) + 3 = 30k' + 13 \Rightarrow r = 13$$

$$q = 3k'' + 2 \Rightarrow 2a + 1 = 10(3k'' + 2) + 3 = 30k'' + 23 \Rightarrow r = 23$$

تست مجموع ارقام بزرگ ترین عددی که در تقسیم به 42 باقی مانده آن $\frac{3}{4}$ مربع خارج قسمت آن باشد، کدام است؟

- (۱) 15 (۲) 16 (۳) 17 (۴) 18

$$a \overline{) 42} \quad - \frac{3}{4}q \Rightarrow a = 42q + \frac{3}{4}q^2, 0 \leq \frac{3}{4}q^2 < 42 \Rightarrow 0 \leq q^2 < 56 \Rightarrow q_{\max} = 7$$

اما q باید زوج باشد وگرنه باقی مانده عدد صحیح نمی شود پس $q_{\max} = 6$.

$$a_{\max} = 42 \times 6 + \frac{3}{4} \times 6^2 = 252 + 27 = 279 \Rightarrow \text{مجموع ارقام} = 2 + 7 + 9 = 18$$

بنابراین:

تست باقی مانده a بر 12 و 7 به ترتیب برابر 11 و 5 است. باقی مانده a بر 42 کدام است؟

- (۱) 2 (۲) 3 (۳) 5 (۴) 7

پاسخ گزینه «۳» باید دو رابطه را در عددی ضرب کنیم که خارج قسمت جدید مضرب 42 باشد و وقتی آن دو را از هم کم می کنیم اختلاف یکی شود:

$$a = 12q + 11 \xrightarrow{\times 7} 7a = 84q + 77$$

$$a = 7q' + 5 \xrightarrow{\times 6} 6a = 42q' + 30$$

$$\xrightarrow{(-)} 7a - 6a = 84q + 77 - 42q' - 30 \Rightarrow a = 42(2q - q') + 47$$

واضح است که باقی مانده عبارت بر 42 برابر 5 است.

افراز مجموعه $\mathbb{Z}$ به کمک تقسیم

$\mathbb{Z}$

عددهای فرد $2k + 1$ یا	عددهای فرد $2k$ یا
---------------------------	-----------------------

عددهای صحیح در تقسیم به 2 ، دو حالت دارند: یا زوج اند یا فرد. بنابراین مجموعه $\mathbb{Z}$ در تقسیم به 2 به دو مجموعه افراز می شود:

$\mathbb{Z}$

mk	$mk + 1$	$mk + 2$	$\dots$	$mk + m - 1$
------	----------	----------	---------	--------------

با همین استدلال در تقسیم به m مجموعه $\mathbb{Z}$ به m مجموعه افراز می شود.

برای مثال در تقسیم به 5 مجموعه $\mathbb{Z}$ به 5 دسته زیر افراز می شود:

$\mathbb{Z}$

$5k$	$5k + 1$	$5k + 2$	$5k + 3$	$5k + 4$
مضرب 5	عددهایی که در تقسیم به 5 باقی مانده 1 دارند.	عددهایی که در تقسیم به 5 باقی مانده 2 دارند.	عددهایی که در تقسیم به 5 باقی مانده 3 دارند.	عددهایی که در تقسیم به 5 باقی مانده 4 دارند.



تست - باقی‌مانده یک عدد اول بزرگ‌تر از ۱۱ در تقسیم به ۱۲ چند حالت مختلف می‌تواند داشته باشد؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

پاسخ - گزینه «۳» در تقسیم به ۱۲ مجموعه $\mathbb{Z}$ به ۱۲ مجموعه زیر افراز می‌شود. بررسی می‌کنیم در کدام حالت‌ها عدد نمی‌تواند اول باشد.

زوج $12k + 8$	زوج $12k + 4$	زوج $12k$
مضرب ۳ $12k + 9$	$12k + 5$	$12k + 1$
زوج $12k + 10$	زوج $12k + 6$	زوج $12k + 2$
$12k + 11$	$12k + 7$	مضرب ۳ $12k + 3$

پس باقی‌مانده یک عدد اول در تقسیم به ۱۲ می‌تواند برابر ۱ یا ۵ یا ۷ یا ۱۱ باشد.

تست - چند عدد طبیعی کوچک‌تر از ۳۰ وجود دارد به طوری که وقتی در تقسیم به ۳ مجموعه $\mathbb{Z}$ به ۳ دسته افراز می‌شود، این عددها در دسته $4k + 2$ قرار گیرند؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

پاسخ - گزینه «۲» عددهای کوچک‌تر از ۳۰ دسته $4k + 2$ و $3k + 1$ را مشخص کرده اشتراک آن‌ها را پیدا می‌کنیم:

$$\{x = 3k + 1 : k \in \mathbb{Z}, x < 30\} = \{1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28\}$$

$$\{x = 4k + 2 : k \in \mathbb{Z}, x < 30\} = \{2, 6, 10, 14, 18, 22, 26\}$$

همان‌طور که می‌بینید تنها عددهای مشترک ۱۰ و ۲۲ هستند.

تست - اگر a مضرب ۵ نباشد، باقی‌مانده $3a^2 + 1$ در تقسیم به ۵ کدام است؟

- (۱) ۱ یا ۲ (۲) ۱ یا ۴ (۳) ۳ یا ۴ (۴) ۲ یا ۴

پاسخ - گزینه «۳» می‌دانیم در تقسیم به ۵ مجموعه $\mathbb{Z}$ به ۵ دسته افراز می‌شود، چون عدد a مضرب ۵ نیست پس آن را به یکی از حالت‌های زیر می‌توان نوشت:

$$a = 5k + 1 \quad a = 5k + 2 \quad a = 5k + 3 \quad a = 5k + 4$$

در هر حالت $3a^2 + 1$ را پیدا کرده باقی‌مانده آن را به ۵ به دست می‌آوریم:

$$a = 5k + 1 \Rightarrow 3a^2 + 1 = 3(5k + 1)^2 + 1 = 75k^2 + 30k + 4 \Rightarrow r = 4$$

مضرب ۵

$$a = 5k + 2 \Rightarrow 3a^2 + 1 = 3(5k + 2)^2 + 1 = 75k^2 + 60k + 13 \Rightarrow r = 3$$

مضرب ۵

$$a = 5k + 3 \Rightarrow 3a^2 + 1 = 3(5k + 3)^2 + 1 = 75k^2 + 90k + 28 \Rightarrow r = 3$$

مضرب ۵

$$a = 5k + 4 \Rightarrow 3a^2 + 1 = 3(5k + 4)^2 + 1 = 75k^2 + 120k + 49 \Rightarrow r = 4$$

مضرب ۵

پس باقی‌مانده برابر ۳ یا ۴ است.

این سؤال را در فصل بعد و با هم‌نهستی خیلی راحت‌تر می‌شود حل کرد اما اگر در همین فصل هم می‌خواهید ساده‌تر به سؤال پاسخ دهید به جای کل عبارت می‌توانید فقط باقی‌مانده‌ها را جای‌گذاری کنید:

$$r = 1 \Rightarrow 3 \times 1^2 + 1 = 4$$

$$r = 2 \Rightarrow 3 \times 2^2 + 1 = 13 \Rightarrow r = 3$$

$$r = 3 \Rightarrow 3 \times 3^2 + 1 = 28 \Rightarrow r = 3$$

$$r = 4 \Rightarrow 3 \times 4^2 + 1 = 49 \Rightarrow r = 4$$

تست - اگر a مضرب ۵ باشد و زوج نباشد، باقی‌مانده آن در تقسیم به ۲۰ چند حالت مختلف می‌تواند داشته باشد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

پاسخ - گزینه «۲» a مضرب ۵ است پس $a = 5k$ است. می‌خواهیم باقی‌مانده آن را بر ۲۰ به دست آوریم. پس مجبوریم k را در ۴ حالت فرض کنیم که عامل ۲۰ به وجود بیاید. اما چون گفته k زوج نیست پس k یا به صورت $4q + 1$ است یا $4q + 3$ بنابراین:

$$k = 4q + 1 \Rightarrow a = 20q + 5 \Rightarrow r = 5$$

$$k = 4q + 3 \Rightarrow a = 20q + 15 \Rightarrow r = 15$$

پس باقی‌مانده برابر ۵ یا ۱۵ است.



پرسش‌های چهارگزینه‌ای

عادکردن

۴۱- چند عدد از مجموعه $\{۳۱, ۳۲, ۳۳, \dots, ۸۸, ۸۹\}$ مضرب ۳ و زوج است؟

- ۸ (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۱ (۴)

۴۲- به ازای چند مقدار صحیح a ، روابط $a \mid (b+5)^2$ و $a \mid (b+4)(b+6)$ برقرارند؟

- ۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۱ (۴)

۴۳- اگر $a \mid b$ ، کدام یک از نتایج زیر در حالت کلی برقرار نیست؟

- $a^2 \mid b^2 - 2ab$ (۱) $a^2 \mid (a-b)^2$ (۲) $ab \mid 7b^2 - 5ab$ (۳) $a^2 \mid b - a^5$ (۴)

۴۴- برای سه عدد طبیعی a ، b و c ، اگر $abc \mid 2ab + 3ac$ ، آن‌گاه کدام گزینه لزوماً درست نیست؟

- $b \mid 12c$ (۱) $c \mid 8b$ (۲) $a \mid 2b + 3c$ (۳) $bc \mid 2b + 3c$ (۴)

۴۵- از رابطه $a^2 = b^2 + c^2$ کدام گزینه صحیح نیست؟

- $a - b \mid c^2$ (۱) $c \mid a + b$ (۲) $a + b \mid c^2$ (۳) $c \mid a^4 - b^4$ (۴)

۴۶- اگر $a \mid 12$ و $b \mid 12$ ، آن‌گاه کدام رابطه درست نیست؟ ($a, b \in \mathbb{N}$)

- $4 \mid b$ (۱) $a \mid 2b$ (۲) $a \mid 84$ (۳) $2a \mid b$ (۴)

۴۷- اگر $a \mid 25$ و $a \mid 55$ ، آن‌گاه a چند مقدار صحیح می‌تواند بپذیرد؟

- ۱۶ (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴)

۴۸- به ازای چند عدد طبیعی n هر دو رابطه $n^2 \mid 12$ و $3600 \mid n$ برقرار است؟

- ۲۴ (۱) ۱۸ (۲) ۱۲ (۳) ۳۶ (۴)

۴۹- تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت عدد صحیح $x = 2^n \times 3^m$ از تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت عدد صحیح $\frac{x}{18}$ ، ۱۴ واحد بیشتر است. تعداد مقسوم‌علیه‌های $3x$ از تعداد مقسوم‌علیه‌های $\frac{x}{6}$ چه قدر بیشتر است؟

- ۱۲ (۱) ۱۴ (۲) ۱۵ (۳) ۱۴ (۴) (اطلاعات مسئله کافی نیست.)

۵۰- اگر n عددی طبیعی باشد که دارای ۳۰ مقسوم‌علیه طبیعی است، n^2 حداکثر چند مقسوم‌علیه دارد؟

- ۵۹ (۱) ۸۷ (۲) ۹۹ (۳) ۱۳۵ (۴)

۵۱- عدد $24! + 10!$ بر چند عدد طبیعی یک‌رقمی بخش پذیر است؟

- ۴ (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴)

۵۲- عدد $24! + 25!$ بر کدام یک از اعداد زیر بخش پذیر نیست؟

- ۱۶۹ (۱) ۱۹۶ (۲) ۲۸۹ (۳) ۳۲۴ (۴)

۵۳- به ازای چند عدد صحیح n ، هر دو رابطه $2n^2 + n \mid 2n^3 + 2$ و $n^3 + 2 \mid 2n^2 + n$ برقرار است؟

- ۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴)

۵۴- به ازای چند مقدار صحیح x ، $a \mid x^2 - 6x + 9$ و $a \mid x^2 - 6x + 9$ ، $|a| > 1$ است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) بی‌شمار (۴)

۵۵- اگر $x^3 - 3x^2 + 3x - 28 \mid x^3 - 3x^2 + 3x - 28$ ، آن‌گاه x چند مقدار متمایز می‌تواند باشد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۵۶- اگر $3^n \mid 30!$ ، بزرگ‌ترین مقدار n کدام است؟

- ۱۰ (۱) ۱۲ (۲) ۱۴ (۳) ۱۶ (۴)

۵۷- برای هر عدد طبیعی n داریم $n! = 2^{a_1} \times 3^{a_2} \times 5^{a_3} \times \dots$ ، مقدار $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ به ازای $n = 24$ کدام است؟

- ۴۳ (۱) ۴۴ (۲) ۴۵ (۳) ۴۶ (۴)

۵۸- کوچک‌ترین عدد طبیعی n به طوری که $7^{10} \mid n!$ باشد کدام است؟

- ۴۹ (۱) ۵۶ (۲) ۶۳ (۳) ۷۰ (۴)



۵۹- به ازای چند عدد طبیعی n رابطه $2^{n+9} | 8^{n-1}$ درست است؟

- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) بی شمار

۶۰- اگر $x^2 | 12$ ، چند عدد سه رقمی x وجود دارد؟

- (۱) ۱۴۹ (۲) ۱۵۰ (۳) ۱۵۱ (۴) ۱۵۲

۶۱- اگر $a^2 | 189$ و $512 | b^2$ در این صورت کمترین مقدار $a + b$ کدام است؟ ($a, b \in \mathbb{N}$)

- (۱) ۷۱ (۲) ۷۹ (۳) ۹۵ (۴) ۲۹

۶۲- تعداد اعداد ۴ و ۵ رقمی مضرب ۴۸ که مکعب کامل باشند کدام است؟ ($\sqrt[3]{100} = 4/6$)

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۶۳- برای دو عدد صحیح a و b ($a \neq 0$)، اگر $a^2 | b^2$ آن گاه کدام رابطه زیر لزوماً درست است؟

- (۱) $a^2 | b^5$ (۲) $a^2 | b^5$ (۳) $a^4 | b^7$ (۴) $a^7 | b^{12}$

۶۴- اگر $a^{11} | b^{11}$ و $b^7 | c^{11}$ کدام گزینه غلط است؟

- (۱) $a^4 | c^{11}$ (۲) $a^2 | b^5$ (۳) $a | c^2$ (۴) $a^5 | c^{12}$

۶۵- به ازای چند عدد صحیح مانند a ، دو عدد $4n + 3$ و $5n + 2$ همواره بر a بخش پذیرند؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

۶۶- دو عدد $11k + 2$ و $7k + m$ به ازای مقادیر مختلف k بر عدد صحیح a بخش پذیرند. به ازای کدام m ، عدد a فقط چهار مقدار صحیح دارد؟

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۷ (۴) ۶

۶۷- دو عدد $2n^2 + 3$ و $3n^2 + n + 2$ به ازای برخی از مقادیر n بر عدد d بخش پذیرند. کدام می تواند باشد؟

- (۱) ۲۹ (۲) ۳۱ (۳) ۳۷ (۴) ۲۳

۶۸- اگر a عددی طبیعی و بزرگتر از یک باشد، به گونه ای که $a^2 | 2n - 7$ و $a | 4n - 7$ آن گاه چند مقدار برای a وجود دارد؟ ($n \in \mathbb{N}$)

- (۱) هیچ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

۶۹- اگر $2a + 3b | 11$ ، به ازای چند مقدار k از مجموعه $A = \{x | x \in \mathbb{Z}, -11 \leq x \leq 11\}$ ، رابطه $6a + kb | 11$ لزوماً برقرار است؟ ($a, b \in \mathbb{Z}$)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۷۰- اگر $5a + 9b | 3a + 4b$ آن گاه کدام یک از اعداد زیر همواره مضرب $3a + 4b$ است؟

- (۱) $83a$ (۲) $167b$ (۳) $167a$ (۴) $42b$

۷۱- عددی مانند k در $\mathbb{Z}$ وجود دارد که $4k + 1$ بر 7 و $4k^2 + 36k + m$ بر 49 کدام می تواند باشد؟

- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

۷۲- اگر $3n + 1 | 7$ ، بزرگترین عددی که عبارت $30n^2 + 34n + 8$ همواره بر آن بخش پذیر است کدام است؟

- (۱) ۱۹۶ (۲) ۴۹ (۳) ۹۸ (۴) ۲۸

۷۳- اگر $93m - 25 | 13$ کدام گزینه درست است؟

- (۱) $13 | m - 1$ (۲) $13 | m + 1$ (۳) $13 | 2m + 1$ (۴) $13 | 2m - 1$

۷۴- اگر $5m + 3 | 7$ و $3m + 7 | 11$ کدام گزینه درست است؟

- (۱) $77 | 15m^2 - 44m + 21$ (۲) $77 | 15m^2 + 44m - 21$ (۳) $77 | 5m^2 - 11m + 7$ (۴) $77 | 5m^2 + 11m - 7$

۷۵- اگر $(x-1)(x-2)(x-3)$ مضرب ۷ باشد، آن گاه مجموع ارقام بزرگترین عدد طبیعی دورقمی x کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۳ (۳) ۱۷ (۴) ۱۸

۷۶- اگر $12x^3 + 7x^2 - x^3$ مضرب ۹ باشد، آن گاه مجموع ارقام کوچکترین عدد سه رقمی x مضرب ۵ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۹

معادله عادکردنی

۷۷- روی منحنی $y = \frac{7x-1}{3x-1}$ چند نقطه با مختصات طبیعی وجود دارد؟

- (۱) ۶ (۲) صفر (۳) ۲ (۴) ۱

۷۸- نقطه (a, b) نقطه ای با مختصات طبیعی روی تابع $yx - y = 5x + 3$ است. b کدام عدد نمی تواند باشد؟

- (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۶ (۴) ۷



۷۹- اگر $3 - 4n + 2 | n^3$ آن گاه n چند مقدار طبیعی دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

۸۰- تعداد مقادیر x و y صحیح که در تابع $y = \frac{x^3 + x + 2}{x + 1}$ صدق می کند، چنداناست؟

- (۱) ۱ (۲) صفر (۳) ۲ (۴) بی شمار

۸۱- به ازای چند عدد صحیح n رابطه $2 | 3n + 2$ برقرار است؟

- (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۰

۸۲- به ازای چند عدد دورقمی n ، $24 | n^3 - n$ برقرار است؟

- (۱) ۴ (۲) ۴۵ (۳) ۵۶ (۴) ۹۰

۸۳- به ازای چند عدد طبیعی دو یا سه رقمی مانند n ، داریم: $3^n | n^3$ ؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) ۴

۸۴- اگر a عضوی از مجموعه $A = \{3^n | n \in \mathbb{N}\}$ باشد، آن گاه به ازای چند مقدار a عدد طبیعی مانند k می توان یافت به گونه ای که رابطه $3 + k^2 | a$ برقرار باشد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی شمار

باقی مانده مربع عدد فرد در تقسیم به ۸

۸۵- اگر a عددی صحیح و فرد باشد، آن گاه $7 + a^2$ همواره بر کدام یک از اعداد زیر بخش پذیر است؟

- (۱) ۶ (۲) ۱۶ (۳) ۸ (۴) ۹

۸۶- اگر x و y اعدادی صحیح از مجموعه $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ باشند، چند نقطه با مختصات صحیح بر روی منحنی $7 - x^2 = 8y$ قرار دارد؟

- (۱) ۵ (۲) ۱۰ (۳) ۶ (۴) ۴

۸۷- اگر a عددی فرد و p عددی اول باشد و $a | p + 2$ ، باقی مانده تقسیم $2 + p^2 + 2a^2$ به ۸ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) ۵

۸۸- اگر a و b دو عدد صحیح باشند و ab فرد باشد، باقی مانده تقسیم $12 + 8(b - 2) + (a + 2)^2$ بر ۸ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۸۹- اگر p یک عدد فرد باشد، عبارت $1 - p^{16}$ همواره بر 2^n بخش پذیر باشد، حداکثر مقدار n کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

سه اتحاد مهم در بخش پذیری

۹۰- عدد $2^{48} - 3^{48}$ بر کدام یک از اعداد زیر بخش پذیر نیست؟

- (۱) ۱۹ (۲) ۳۵ (۳) ۴۳ (۴) ۶۵

۹۱- عدد $7^{14} + 3^{21}$ بر کدام عدد بخش پذیر است؟

- (۱) ۱۹ (۲) ۱۷ (۳) ۱۳ (۴) ۱۱

۹۲- به ازای چند عدد طبیعی دورقمی m ، $1 + 3^m$ بر ۲۴۴ برقرار است؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۸ (۴) ۲۰

۹۳- به ازای چند عدد طبیعی n ، $1 \leq n \leq 1200$ ، $344 | 7^n - 1$ برقرار است؟

- (۱) ۱۰۰ (۲) ۲۰۰ (۳) ۴۰۰ (۴) هیچ مقدار

۹۴- به ازای چند عدد طبیعی دورقمی n ، $3^n - 2^n$ بر ۲۱۱ بخش پذیر است؟

- (۱) ۱۶ (۲) ۱۸ (۳) ۲۰ (۴) ۱۹

۹۵- به ازای چند مقدار طبیعی دورقمی n ، $5 - \frac{n(n+1)}{7} - 3 \mid 3^n + 5^n$ برقرار است؟

- (۱) ۷ (۲) ۱۵ (۳) ۳۰ (۴) ۴۵

بزرگترین مقسوم علیه مشترک

۹۶- بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد ۳۷۸ و ۴۶۸ چند مقسوم علیه مثبت دارد؟

- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۱۲ (۴) ۴۸



۹۷- اگر m عددی صحیح باشد، حاصل $\frac{(6m^2, 4m)}{|m|}$ چند مقدار متمایز می تواند باشد؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۹۸- اگر $a \mid 2$ حاصل $(3a^2, 420)$ چند مقدار متمایز می تواند باشد؟

۲ (۱) ۴ (۲) ۸ (۳) ۱۶ (۴)

۹۹- اگر $(a, 18) \neq 1$ ، مجموع مقادیر تکریمی a کدام است؟

۳۰ (۱) ۳۲ (۲) ۲۴ (۳) ۳۶ (۴)

۱۰۰- اگر $d = (3n + 2, 36)$ باشد؛ بزرگ ترین مقدار d چند مقسوم علیه طبیعی دارد؟

۳ (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۹ (۴)

۱۰۱- به ازای چند عدد طبیعی دورقمی، $(n - 8, 11)$ بزرگ تر از ۱ می شود؟

۸ (۱) ۷ (۲) ۴۵ (۳) ۹۰ (۴)

۱۰۲- به ازای چند مقدار دورقمی n ، رابطه $(n, 36) = 18$ برقرار است؟

۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴)

۱۰۳- اگر $(15a, 21b) = 102$ باشد، حاصل (a, b) است؟

۱۷ (۱) ۳۴ (۲) ۱۰۲ (۳)

۴) بسته به مقادیر مختلف a و b ، هر ۳ گزینه می تواند صحیح باشد.

۱۰۴- اگر $(a, 9) = 3$ و $(b, 9) = 3$ کدام رابطه زیر همواره درست است؟

$(a + b, 9) = 3$ (۱) $(ab, 27) = 9$ (۲) $(a + b, 9) = 9$ (۳) $(ab, 27) = 27$ (۴)

۱۰۵- به ازای چند عدد طبیعی کوچک تر یا مساوی ۱۰۰، رابطه $(n, 70) = 2$ برقرار است؟

۴۷ (۱) ۳۳ (۲) ۴۹ (۳) ۳۴ (۴)

۱۰۶- به ازای چند عدد طبیعی کوچک تر یا مساوی ۱۰۰، رابطه $(n, 180) = 6$ برقرار است؟

۴ (۱) ۵ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴)

۱۰۷- اگر a و b اعدادی طبیعی باشند به طوری که $(a, 7^3 \times 3) = 49$ باشد و $(b, 3^4 \times 7) = 27$ باشد، اگر حاصل $(a^2 b^3, 21^5)$ به صورت $3^x \times 7^y$ باشد، حاصل xy کدام است؟

۲۰ (۱) ۷۲ (۲) ۳۶ (۳) ۴۵ (۴)

۱۰۸- اگر یک عدد طبیعی دلخواه باشد به گونه ای که $(a, 18) = 6$ و $(a, 121) = 11$ ، آن گاه $(a, 2^2 \times 3^2 \times 7^2 \times 11^2)$ به ازای مقادیر مختلف a ، چند مقدار مختلف می تواند داشته باشد؟

۴ (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۹ (۴)

۱۰۹- کدام گزینه نادرست است؟

$(5a + 1, 5a + 6) = 1$ (۱) $(7a + 2, 7a + 9) = 1$ (۲) $(3a - 1, 3a + 2) = 1$ (۳) $(2a - 2, 2a + 1) = 1$ (۴)

۱۱۰- اعداد صحیح a و b به گونه ای هستند که $3 \mid a$ و $3 \mid b + 1$. کدام نتیجه گیری همواره درست است؟

$(a, b) = 1$ (۱) $(a, b + 1) = 3$ (۲) $(a + b + 1, 3) = 3$ (۳) $(a + b - 1, 3) = 3$ (۴)

۱۱۱- اگر $d > 1$ و $(a, b) = d$ و $4a^2 - b + 13 \mid d$ ، آن گاه a کدام مقدار می تواند باشد؟

۳۶ (۱) ۳۹ (۲) ۷۲ (۳) ۲۵ (۴)

۱۱۲- اگر b عددی فرد باشد به طوری که $(a, b) = 7$ ، حاصل $c \mid 2a - 3b$ ، (b, c) کدام است؟

۱ (۱) ۷ (۲) ۱ یا ۷ (۳) $|c|$ (۴)

۱۱۳- به ازای چند مقدار طبیعی و سه رقمی n ، دو عدد $13n + 6$ و $15n + 7$ نسبت به هم اول اند؟

۹۰۰ (۱) ۴۵۰ (۲) ۱۰۰ (۳) ۲۲۵ (۴)

۱۱۴- اگر به ازای برخی از اعداد طبیعی n ، دو عدد $13n + 5$ و $7n - 2$ نسبت به هم اول نباشند، آن گاه بزرگ ترین مقسوم علیه مشترک این دو عدد کدام است؟

۱۰۱ (۱) ۶۱ (۲) ۹ (۳) ۸۱ (۴)

۱۱۵- به ازای چند عدد دورقمی n ، دو عدد $21n + 1$ و $14n + 3$ نسبت به هم اول اند؟

۷۷ (۱) ۸۳ (۲) ۸۴ (۳) ۹۰ (۴)



۱۱۶- اگر دو عدد $7n + 3$ و $5n + 4$ نسبت به هم اول نباشند، کدام نتیجه درست است؟

- (۱) $11 \mid 7n + 12$ (۲) $13 \mid 7n + 12$ (۳) $17 \mid 7n + 12$ (۴) $19 \mid 7n + 12$

۱۱۷- به ازای کدام مقدار a ، دو عدد صحیح $2n + 3$ و $7n + a$ همواره نسبت به هم اول نیستند؟ ($n \in \mathbb{Z}$)

- (۱) ۱۵ (۲) ۸ (۳) ۱۱ (۴) ۶

۱۱۸- به ازای چند عدد دورقمی دو عدد $3n + 2$ و $5n - 2$ نسبت به هم اول اند؟

- (۱) ۸۵ (۲) ۵ (۳) ۸۴ (۴) ۸۳

۱۱۹- بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد $2n^2 + 3n$ و $3n + 2$ ، برای مقادیر مختلف طبیعی n ، چند مقدار متفاوت می‌تواند داشته باشد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۸

۱۲۰- دو عدد $A = 2^5 \times 3^2 \times 5^m \times 7^3 \times 17$ و $B = 2^2 \times 3^6 \times 5^7 \times 7^n \times 13^2$ دارای 5^3 مقسوم‌علیه مشترک مثبت و غیر یک هستند. حاصل AB چند مقدار متمایز می‌تواند باشد؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

۱۲۱- اگر برای دو عدد طبیعی a و b داشته باشیم $(a, b) = 7$ ، حاصل $(2a + 3b, 3a + 4b)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۷ (۳) ۱۴ (۴) ۲۱

۱۲۲- اگر $(2^a, 2^b) - (2^0a, 2^0b) + 100 = 0$ باشد، به ازای چند عدد طبیعی x هر دو رابطه $x \mid a$ و $x \mid b$ برقرار است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

کوچک‌ترین مضرب مشترک

۱۲۳- کوچک‌ترین عضو مجموعه $\{x \in \mathbb{N} : 28 \mid x, 21 \mid x\}$ چند مقسوم‌علیه غیر اول دارد؟

- (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۱ (۴) ۱۲

۱۲۴- حاصل عبارت مقابل کدام است؟ $([385, 186], 341)$

- (۱) ۷۷ (۲) ۲۱۷ (۳) ۳۴۱ (۴) ۳۳

۱۲۵- به ازای چند عدد طبیعی مانند n ، ک.م.م و ب.م.م دو عدد $9 - 7n + n^2$ و ۳ برابر است؟

- (۱) ۱ (۲) صفر (۳) ۲ (۴) ۴

۱۲۶- به ازای چند عدد صحیح m رابطه $[m, m^2], m^3 = 64$ برقرار است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

۱۲۷- حاصل $([12a^3, 4a], [3a^2, 6a^4])$ کدام است؟

- (۱) $3a^2$ (۲) $12a^2$ (۳) $|4a|$ (۴) $|3a|$

۱۲۸- حاصل عبارت $((a, b)[a, b], (a^2, b^2))$ کدام است؟

- (۱) (a, b) (۲) (a^2, b^2) (۳) $[a, b]$ (۴) $[a^2, b^2]$

۱۲۹- حاصل $[18!, 17! - 16! - 15!]$ کدام است؟

- (۱) $18! \times 15$ (۲) $|5! \times 5|$ (۳) $18! \times 5$ (۴) $18! \times 255$

۱۳۰- به ازای کدام مقدار m رابطه $[(24, 18), m] = 90$ درست است؟

- (۱) ۴۰ (۲) ۶۰ (۳) ۳۶ (۴) ۴۵

۱۳۱- به ازای چند عدد طبیعی m رابطه $[m, 180] = 900$ برقرار است؟

- (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۲

متباین‌سازی

۱۳۲- اگر a و b دو عدد طبیعی باشند به طوری که $(a, b) = 7$ و $ab = 1764$ باشد، حاصل جمع بیشترین و کم‌ترین مقدار $a + b$ کدام است؟

- (۱) ۲۲۴ (۲) ۲۳۱ (۳) ۳۵۰ (۴) ۳۴۳

۱۳۳- اگر a و b دو عدد طبیعی باشند به طوری که $(a, b) = d$ باشد، حاصل $(\frac{a^2 b^2}{d^2}, [a^2, b^2])$ کدام است؟

- (۱) $|ab|$ (۲) d^2 (۳) $[a^2, b^2]$ (۴) $\frac{a^2 b^2}{d}$

۱۳۴- بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد ۱۱ و کوچک‌ترین مضرب مشترک آن‌ها ۳۳۰ است. مجموع دو عدد کدام نمی‌تواند باشد؟

- (۱) ۱۲۱ (۲) ۱۸۷ (۳) ۳۴۱ (۴) ۳۵۲



۱۳۵- اگر a و b دو عدد طبیعی باشند به طوری که $(a, b) = 9$ و $a + b = 126$ باشد، بزرگ‌ترین مقدار $[a, b]$ کدام است؟

- (۱) ۳۶۰ (۲) ۴۰۵ (۳) ۴۳۲ (۴) ۴۴۱

۱۳۶- اگر $2ab = 3(a, b)^2 + 1$ حاصل $a^2 + b^2$ چیست؟ $(a, b \in \mathbb{N})$

- (۱) ۸ (۲) ۵ (۳) ۱۷ (۴) چنین چیزی غیرممکن است.

۱۳۷- اگر a و b دو عدد طبیعی باشند به طوری که $(a, b) \neq 1$ و $2[a, b] = 41(a, b) + 13$ باشد، مقدار $a + b$ کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) ۱۱۷ (۲) ۱۳۰ (۳) ۱۴۳ (۴) ۱۵۶

۱۳۸- چند زوج عدد طبیعی a و b وجود دارد، به طوری که $a + b = 42$ و $\frac{[a, b]}{(a, b)} = 12$ باشد؟

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۶

۱۳۹- اگر a و b دو عدد طبیعی باشند، به طوری که $2a = 7b$ و $3ab + \frac{[a^2, b^2]}{14} = 504$ ، آن‌گاه حاصل (a, b) کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۹

۱۴۰- اگر a و b دو عدد طبیعی باشند به طوری که $2a + 3b = 91$ و $[a, b] = 42$ باشد، مجموع ارقام $3a + 4b$ کدام است؟ $((a, b) > 1)$

- (۱) ۷ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

اعداد اول

۱۴۱- هر عدد اول بزرگ‌تر از ۵ به کدام صورت نمی‌تواند نوشته شود؟

- (۱) $10k + 1$ (۲) $10k + 3$ (۳) $10k + 5$ (۴) $10k + 7$

۱۴۲- اگر p عدد اول و $308 \mid p$ باشد، p چند مقدار متمایز می‌تواند باشد؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴) ۱۲

۱۴۳- اگر a عددی صحیح و p عددی اول باشد به طوری که $\frac{9}{13} = \frac{2a - 4p}{a}$ باشد، حاصل $a + p$ بر کدام عدد اول بخش‌پذیر است؟

- (۱) ۱۹ (۲) ۲۳ (۳) ۲۹ (۴) ۶۹

۱۴۴- به ازای چند عدد دورقمی بزرگ‌تر از 80 مانند n رابطه $80 \mid n$ برقرار نیست؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۱۴۵- اگر عدد صحیح a دارای دو مقسوم‌علیه طبیعی و b دارای ۳ مقسوم‌علیه طبیعی باشد و $(a, b) = 1$ باشد، ba دارای چند مقسوم‌علیه طبیعی است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) نمی‌توان گفت.

۱۴۶- اگر p عددی اول و بزرگ‌تر از ۳ باشد، باقی‌مانده p^2 بر ۶ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۵ و ۱

۱۴۷- اگر p عدد اول بزرگ‌تر از ۳ باشد، باقی‌مانده p بر ۱۸ چند مقدار متمایز می‌تواند باشد؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۱۴۸- اگر p عدد اول بزرگ‌تر از ۳ باشد، چه تعداد از اعداد زیر حتماً مرکب هستند؟

- (الف) $\frac{p^2 + 1}{2}$ (ب) $\frac{p^2 + 3}{2}$ (پ) $\frac{p^2 + 5}{2}$ (ت) $\frac{p^2 + 7}{2}$
(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۴۹- اگر p عدد اول بزرگ‌تر از ۲ باشد، کدام یک از عبارات زیر همواره عددی مرکب است؟

- (۱) $7p - 6$ (۲) $2^p - 1$ (۳) $2^p + 1$ (۴) $2^p + 2$

۱۵۰- اگر $n = (2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times \dots \times 97) + 1$ باشد، به ازای چند مقدار طبیعی دورقمی کوچک‌تر از ۱۰۰ برای $x \mid n$ ؟ n برابر حاصل ضرب اعداد اول کوچک‌تر از ۱۰۰ به علاوه ۱ است.

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲۵ (۴) ۲۶

۱۵۱- به ازای چند مقدار طبیعی n ، هر ۵ عدد $n, n + 2, n + 6, n + 8$ و $n + 14$ اول هستند؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۵۲- بزرگ‌ترین عدد اول p که $50 \mid p^3$ باشد، کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۱۳ (۳) ۱۷ (۴) ۴۷

۱۵۳- به ازای چند مقدار صحیح a ، حاصل $a^2 - 7a + 12$ عددی اول است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی‌شمار

۱۵۴- اگر a, b و c اعدادی اول متمایز باشند به طوری که $a + b + c = 14$ باشد، $a^2 + b^2 + c^2$ بر کدام عدد بخش پذیر نیست؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۱۱ (۴) ۱۳

۱۵۵- چند عدد اول مانند p وجود دارد که عدد $16p + 11$ مربع کامل باشد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی شمار

۱۵۶- چند عدد اول مانند p وجود دارد که عدد $27p + p$ مکعب کامل باشد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی شمار

۱۵۷- اگر x, y و z اعداد اول متمایز و رابطه $x = y^2 - z^2$ برقرار باشد، آن گاه باقی مانده تقسیم xyz بر ۷ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۶

۱۵۸- اگر a, b و c اعداد اول متمایز و رابطه $a = b^2 + c^2$ برقرار باشد، چند مقدار دورقمی برای a وجود دارد؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۱۵۹- اگر a, b و c اعداد اول متمایز و رابطه $a^2 = b^2 + c^2$ برقرار باشد، چند مقدار برای a وجود دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی شمار

❖ قضیه تقسیم و کاربردها

۱۶۰- در تقسیم چند عدد سه رقمی به ۷، باقی مانده برابر با ۲ می شود؟

- (۱) ۱۲۸ (۲) ۱۲۹ (۳) ۱۳۰ (۴) ۱۳۱

۱۶۱- اگر در تقسیمی ۵۰ واحد به مقسوم و ۶ واحد به مقسوم علیه اضافه شود، خارج قسمت تغییری نکرده و باقی مانده ۴ واحد کم شود، خارج قسمت کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۲ (۴) ۱۵

۱۶۲- فرض کنید مجموع خارج قسمت و باقی مانده تقسیم عدد طبیعی a بر ۱۷، عدد ۹ باشد. کدام عدد زیر بر ۱۶ بخش پذیر است؟

- (۱) $a + 3$ (۲) $a + 5$ (۳) $a + 7$ (۴) $a + 9$

۱۶۳- در تقسیم عدد a بر ۱۷، باقی مانده برابر ۷ می باشد. حداقل چند واحد از مقسوم کم کنیم تا باقی مانده برابر ۱۳ شود؟

- (۱) ۱۱ (۲) ۶ (۳) ۱۰ (۴) ۴

۱۶۴- در یک تقسیم، خارج قسمت برابر ۵ و باقی مانده ۲۴ می باشد. حداکثر چند واحد می توان به مقسوم علیه اضافه کرد به شرطی که مقسوم و خارج قسمت تغییر نکنند؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۱۶۵- در تقسیم عدد a بر ۱۲، باقی مانده ۷ است. اگر ۷۰ واحد به مقسوم اضافه کنیم، خارج قسمت m واحد زیاد و باقی مانده n واحد کم می شود. $m + n$ کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۱

۱۶۶- خارج قسمت و باقی مانده تقسیم عدد طبیعی a بر b به ترتیب ۳۱ و ۲۴ می باشد. تعداد عددهای طبیعی سه رقمی a که بر ۵ بخش پذیر باشد کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۶ (۳) ۳ (۴) ۲

۱۶۷- چند عدد سه رقمی طبیعی وجود دارد که در تقسیم بر ۱۱، خارج قسمت مضرب ۵ و باقی مانده مضرب ۷ باشد؟

- (۱) ۶۸ (۲) ۱۷ (۳) ۸۵ (۴) ۳۴

۱۶۸- باقی مانده تقسیم عددی بر ۱۱۷ برابر ۲۸ است. باقی مانده تقسیم آن بر ۱۳ برابر کدام گزینه است؟

- (۱) ۲ (۲) ۵ (۳) ۹ (۴) ۱۱

۱۶۹- اگر $a = 91k + 23$ باشد، باقی مانده تقسیم $9 - 2a^2 - a^3$ بر ۷ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۱۷۰- اگر باقی مانده تقسیم دو عدد a و b بر ۱۷ به ترتیب برابر ۳ و ۵ باشد، باقی مانده تقسیم $2a + 3b + ab$ بر ۱۷ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۷۱- باقی مانده تقسیم اعداد طبیعی $2a$ و $3a$ بر عدد طبیعی x ، به ترتیب ۵ و ۲۳ است. x کدام است؟

- (۱) ۳۰ (۲) ۳۱ (۳) ۵۸ (۴) ۵۹