

درس‌نامه + پرسش‌های چهارگزینه‌ای + پاسخ‌های کاملاً تشریحی

# حسابان ۲ (دوازدهم)

ویراست سوم

کاظم اجلالی، ارشک حمیدی

انتشارات  
آگاه



## پیشگفتار

### به نام خدا

این کتاب را بر اساس محتوای کتاب درسی حسابان ۲ پایه دوازدهم و با هدف آموزش عمیق‌تر مفاهیم درسی و کسب مهارت در حل پرسش‌های چهارگزینه‌ای نوشته‌ایم. بنابراین، کتاب حاضر مکمل کتاب درسی است و رویکرد آن آموزش نکات و مطالبی است که برای حل پرسش‌های چهارگزینه‌ای مفیدند.

هر فصل کتاب به چند درس و هر درس به چند بخش تقسیم شده است. در ابتدای هر بخش، ضمن مرور نکات مربوط به آن، روش‌های اصلی حل پرسش‌های چهارگزینه‌ای را با آوردن نمونه‌هایی از این پرسش‌ها آموزش داده‌ایم. پس از آن، تعداد زیادی پرسش چهارگزینه‌ای آورده‌ایم و راه‌حل آن‌ها را در انتهای کتاب گنجانده‌ایم. در انتخاب این پرسش‌ها به تنوع و فراوانی اهمیت داده‌ایم. به این ترتیب، با مطالعه این کتاب، تقریباً هر آنچه را که برای حل پرسش‌های چهارگزینه‌ای و کسب آمادگی برای شرکت در آزمون‌های مختلف نیاز دارید به‌دست خواهید آورد.

در این ویراست ساختار کتاب و محتوای آن تغییرات زیادی کرده است:

- درس‌نامه‌ها کامل‌تر شده‌اند؛

- تعداد زیادی پرسش چهارگزینه‌ای اضافه شده است؛

- هر جا که لازم بوده است، پاسخ‌ها بازنویسی و راه‌حل‌های جدید اضافه شده‌اند.

هر درس کتاب به چند بخش جدید تقسیم شده است که موضوع و حجم مطالب آن متناسب با تدریس یک جلسه تدریس معلم در کلاس است. پرسش‌های چهارگزینه‌ای هر بخش هم در انتهای آن بخش آمده است تا دسترسی به آن‌ها ساده‌تر باشد. همچنین پرسش‌های هر بخش را به سه سطح تقسیم کرده‌ایم: در سطح اول پرسش‌هایی ساده و مفهومی را آورده‌ایم که با حل آن‌ها مفاهیم آن مبحث مرور می‌شوند. این پرسش‌ها کمتر در آزمون‌ها دیده می‌شوند ولی برای تسلط بر مفاهیم درس، حل آن‌ها ضروری است. در سطح دوم پرسش‌هایی را آورده‌ایم که سطح دشواری آن‌ها متوسط است و در آزمون‌های آزمایشی و کنکور سراسری بیشتر این نوع پرسش‌ها مطرح می‌شود. تعداد این پرسش‌ها بسیار بیشتر از پرسش‌های سطح اول است و حل آن‌ها به تمام دانش‌آموزان توصیه می‌شود. در سطح سوم پرسش‌هایی را آورده‌ایم که سطح دشواری آن‌ها بالاتر از پرسش‌های سطح دوم است. تعداد این پرسش‌ها زیاد نیست و حل آن‌ها به دانش‌آموزان مستعد و سخت‌کوش توصیه می‌شود. این پرسش‌ها ممکن است در آزمون‌های آزمایشی و کنکور سراسری مطرح شوند ولی فراوانی آن‌ها کم است.

در انتهای هر درس، سؤالات کنکورهای سراسری متناسب با آن درس را آورده‌ایم و در انتهای هر فصل، سه آزمون‌هایی از مباحث آن فصل قرار داده‌ایم تا بتوانید با حل آن‌ها میزان تسلط خود بر مطالب فصل را محک بزنید.

وظیفه خود می‌دانیم از همکاران عزیزمان در نشر الگو، دکتر آریس آفانیانس و دکتر ابوالفضل علی‌بمانی برای ویراستاری علمی، خانم فاطمه احدی برای صفحه‌آرایی کتاب و خانم ستین مختار مدیر واحد ویراستاری و حروفچینی تشکر و قدردانی کنیم.

مؤلفان

## فهرست

### ◆ فصل اول: تابع

درس اول: تبدیل نمودار توابع ..... ۲

سؤالات کنکور سراسری ..... ۳۲

درس دوم: تابع درجه سوم، توابع یکنوا و بخش پذیری و تقسیم

بخش اول: توابع چند جمله‌ای ..... ۳۴

بخش دوم: توابع صعودی و نزولی ..... ۴۰

بخش سوم: بخش پذیری و تقسیم ..... ۶۱

سؤالات کنکور سراسری ..... ۶۶

آزمون‌های فصل ..... ۶۸

### ◆ فصل دوم: مثلثات

درس اول: تناوب و تانژانت

بخش اول: تابع متناوب ..... ۷۲

بخش دوم: نمودار توابع سینوس و کسینوس ..... ۷۸

بخش سوم: تابع تانژانت ..... ۹۰

سؤالات کنکور سراسری ..... ۹۷

درس دوم: معادلات مثلثاتی

بخش اول: تانژانت مجموع دو زاویه ..... ۱۰۰

بخش دوم: معادلات مثلثاتی ..... ۱۱۰

سؤالات کنکور سراسری ..... ۱۲۹

آزمون‌های فصل ..... ۱۳۳

### ◆ فصل سوم: حدهای نامتناهی – حد در بی‌نهایت

درس اول: حدهای نامتناهی

بخش اول: حد نامتناهی ..... ۱۳۶

بخش دوم: مجانب قائم ..... ۱۵۰

سؤالات کنکور سراسری ..... ۱۶۱

درس دوم: حد در بی‌نهایت

بخش اول: حد در بی‌نهایت ..... ۱۶۲

بخش دوم: مجانب افقی ..... ۱۷۸

سؤالات کنکور سراسری ..... ۱۸۵

آزمون‌های فصل ..... ۱۸۷

بخش سوم: اکستریم‌های نسبی ..... ۲۸۸

بخش چهارم: اکستریم‌های مطلق ..... ۳۰۲

بخش پنجم: بهینه‌سازی ..... ۳۰۹

سؤالات کنکور سراسری ..... ۳۱۸

#### درس دوم: جهت تقعر نمودار یک تابع و نقطه عطف آن

بخش اول: جهت تقعر ..... ۳۲۲

بخش دوم: نقطه عطف ..... ۳۲۹

سؤالات کنکور سراسری ..... ۳۳۷

#### درس سوم: رسم نمودار تابع

بخش اول: نمودار توابع درجه سوم و هموگرافیک ..... ۳۳۹

بخش دوم: نمودارشناسی ..... ۳۴۷

بخش سوم: رسم نمودار تابع مشتق ..... ۳۶۰

سؤالات کنکور سراسری ..... ۳۶۴

آزمون‌های فصل ..... ۳۶۶

#### فصل ششم: پاسخ‌های تشریحی

پاسخ‌های تشریحی ..... ۳۷۰

#### فصل هفتم: پاسخنامه کلیدی

پاسخنامه کلیدی ..... ۵۸۲

پاسخنامه کلیدی آزمون‌ها ..... ۵۸۸

#### فصل چهارم: مشتق

درس اول: آشنایی با مفهوم مشتق ..... ۱۹۰

سؤالات کنکور سراسری ..... ۱۹۶

#### درس دوم: مشتق‌پذیری و پیوستگی

بخش اول: مشتق چپ، مشتق راست و مشتق نامتناهی ..... ۱۹۷

بخش دوم: تابع مشتق و قواعد مشتق‌گیری ..... ۲۰۷

بخش سوم: مشتق تابع مرکب ..... ۲۲۱

بخش چهارم: مشتق‌پذیری ..... ۲۳۳

بخش پنجم: خط مماس بر نمودار تابع ..... ۲۴۲

بخش ششم: مشتق دوم ..... ۲۵۱

بخش هفتم: قاعده هوییتال ..... ۲۵۶

سؤالات کنکور سراسری ..... ۲۵۹

#### درس سوم: آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر

سؤالات کنکور سراسری ..... ۲۶۹

آزمون‌های فصل ..... ۲۷۰

#### فصل پنجم: کاربردهای مشتق

##### درس اول: اکستریم‌های یک تابع و توابع صعودی و نزولی

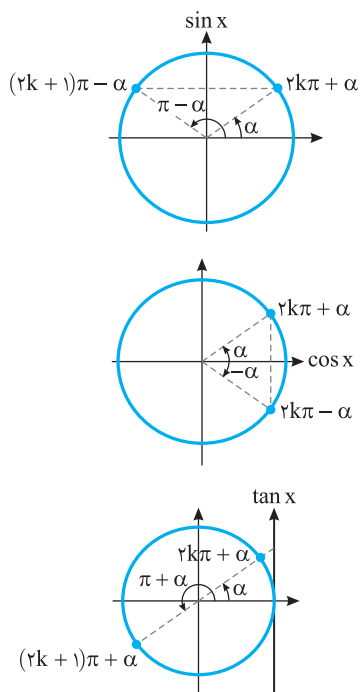
بخش اول: ارتباط مشتق و یکنوایی تابع ..... ۲۷۴

بخش دوم: نقاط بحرانی ..... ۲۸۳

## فصل دوم

### درس دوم / بخش دوم: معادلات مثلثاتی

#### معادلات مثلثاتی ساده



❖ فرض کنید  $\alpha$  زاویه‌ای حاده باشد. معادله مثلثاتی  $\sin x = \sin \alpha$  را در نظر بگیرید. از روی دایره مثلثاتی شکل مقابل معلوم است که  $x = \alpha$  و  $x = \pi - \alpha$  جواب‌های این معادله هستند. همچنین، معادله مورد نظر جواب دیگری در بازه  $[0, 2\pi]$  ندارد. البته چون برای هر عدد صحیح  $k$ ،  $\sin(2k\pi + \alpha) = \sin \alpha$ ، پس  $x = 2k\pi + \alpha$  نیز جواب است. همین طور، یعنی  $x = 2k\pi + \pi - \alpha$  نیز برای هر عدد صحیح  $k$  جواب این معادله است. این نتیجه در مورد هر زاویه دلخواهی مانند  $\alpha$  نیز درست است.

❖ اکنون معادله مثلثاتی  $\cos x = \cos \alpha$  را در نظر بگیرید. از روی دایره مثلثاتی شکل مقابل معلوم است که  $x = \alpha$  و  $x = -\alpha$  جواب‌های این معادله هستند. همچنین، معادله مورد نظر جواب دیگری در بازه  $[-\pi, \pi]$  ندارد. البته چون برای هر عدد صحیح  $k$ ،  $\cos(2k\pi \pm \alpha) = \cos \alpha$ ، پس  $x = 2k\pi + \alpha$  و  $x = 2k\pi - \alpha$  نیز جواب معادله مورد نظر هستند. این نتیجه در مورد هر زاویه دلخواهی مانند  $\alpha$  نیز درست است.

❖ اکنون معادله  $\tan x = \tan \alpha$  را در نظر بگیرید. از روی دایره مثلثاتی شکل مقابل معلوم است که  $x = \alpha$  و  $x = \pi + \alpha$  جواب‌های این معادله هستند. همچنین، معادله مورد نظر جواب دیگری در بازه  $[0, 2\pi]$  ندارد. البته، چون اگر  $k$  عددی صحیح باشد،  $\tan(k\pi + \alpha) = \tan \alpha$ ، پس  $x = k\pi + \alpha$  نیز جواب معادله مورد نظر است. این نتیجه در مورد هر زاویه دلخواهی مانند  $\alpha$  نیز درست است.

#### نکته

$$x = 2k\pi + \alpha, \quad x = (2k+1)\pi - \alpha, \quad k \in \mathbb{Z}$$

● جواب‌های کلی معادله  $\sin x = \sin \alpha$  به صورت مقابل هستند:

$$x = 2k\pi \pm \alpha, \quad k \in \mathbb{Z}$$

● جواب‌های کلی معادله  $\cos x = \cos \alpha$  به صورت مقابل هستند:

$$x = k\pi + \alpha, \quad k \in \mathbb{Z}$$

● جواب‌های کلی معادله  $\tan x = \tan \alpha$  به صورت مقابل هستند:

مثال:

$$1) \sin x = \sin \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}, \quad x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$2) \cos x = \cos \frac{3\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{3\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$3) \tan x = \tan \frac{\pi}{8} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{8}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

جواب‌های کلی معادله  $\sin x = \sin \alpha$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

$$-\frac{k\pi}{2}, \frac{(2k+1)\pi}{6} \quad (4)$$

$$\frac{2k\pi}{5}, \frac{(2k+1)\pi}{5} \quad (3)$$

$$\frac{k\pi}{3}, \frac{(2k+1)\pi}{6} \quad (2)$$

$$k\pi, \frac{(2k+1)\pi}{4} \quad (1)$$

توجه کنید که

راه حل

$$\sin x = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = (2k+1)\pi - \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{(2k+1)\pi}{6}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

تست  
□□□□

جواب‌های کلی معادله  $\cos 4x = \cos x$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

- (۱)  $2k\pi$  (۲)  $2k\pi + \frac{2\pi}{5}, 2k\pi - \frac{2\pi}{5}$  (۳)  $\frac{2k\pi}{3}, \frac{2k\pi}{5}$  (۴)  $2k\pi - \frac{2\pi}{3}, 2k\pi + \frac{2\pi}{3}$

معادله را حل می‌کنیم:

راه‌حل

$$\cos 4x = \cos x \Rightarrow \begin{cases} 4x = 2k\pi + x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ 4x = 2k\pi - x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

تست  
□□□□

معادله  $\tan 3x = \tan 2x$  در بازه  $[0, 2\pi]$  چند جواب دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

$$\tan 3x = \tan 2x \Rightarrow 3x = k\pi + 2x \Rightarrow x = k\pi$$

توجه کنید که

راه‌حل

بنابراین جواب‌های واقع در بازه  $[0, 2\pi]$  عبارت‌اند از  $x = 0$ ،  $x = \pi$  و  $x = 2\pi$ .

نکته

برای پیدا کردن جواب‌های معادله مثلثاتی در یک بازه می‌توانیم به ترتیب زیر عمل کنیم:

- (۱) به ازای  $k=0$  جواب را به دست می‌آوریم و اگر در بازه مورد نظر بود، آن را قبول می‌کنیم.  
(۲) به ازای  $k=1$ ،  $k=2$ ، ... جواب‌ها را به دست می‌آوریم و این کار را تا جایی ادامه می‌دهیم که جواب‌ها در بازه مورد نظر قرار نداشته باشند.  
(۳) به ازای  $k=-1$ ،  $k=-2$ ، ... جواب‌ها را به دست می‌آوریم و این کار را تا جایی ادامه می‌دهیم که جواب‌ها در بازه مورد نظر قرار نداشته باشند.

تست  
□□□□

معادله  $\sin(x + \frac{\pi}{3}) - \sin x = 0$  چند جواب در بازه  $(0, 2\pi)$  دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

معادله را به صورت  $\sin(x + \frac{\pi}{3}) = \sin x$  می‌نویسیم. بنابراین جواب‌های آن به صورت زیر هستند

$$x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + x \Rightarrow \frac{\pi}{3} = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ (غ.ق.ق)}, \quad x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \pi - x \Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

|   |                 |                  |                  |
|---|-----------------|------------------|------------------|
| k | ۰               | ۱                | ۲                |
| x | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{7\pi}{3}$ |

(غ.ق.ق.)

اکنون جواب‌های واقع در بازه  $(0, 2\pi)$  را به دست می‌آوریم

پس معادله دو جواب در این بازه دارد.

نکته

گاهی ممکن است چند مجموعه جواب‌های کلی برای معادله مثلثاتی به دست بیاید که یکی از آن‌ها زیرمجموعه دیگری باشد.

تست  
□□□□

جواب‌های کلی معادله  $\cos 3x = \cos x$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

- (۱)  $k\pi$  (۲)  $\frac{k\pi}{2}$  (۳)  $2k\pi$  (۴)  $k\pi + \frac{\pi}{2}$
- $\cos 3x = \cos x \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + x \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 3x = 2k\pi - x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$
- مجموعه جواب  $\frac{k\pi}{2}$  شامل مجموعه جواب  $k\pi$  نیز هست. پس جواب‌های معادله به صورت  $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$  هستند.

توجه کنید که

راه‌حل

نکته

برخی معادله‌های مثلثاتی را می‌توان با استفاده از روابط میان نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های متمم یا مکمل به معادله‌های ساده مثلثاتی تبدیل کرد.



تست

راه حل

معادله  $\cos 4x + \cos x = 0$  چند جواب در بازه  $[0, \pi]$  دارد؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

معادله را به صورت زیر بازنویسی می کنیم:

$$\cos 4x = -\cos x \Rightarrow \cos 4x = \cos(\pi - x) \Rightarrow \begin{cases} 4x = 2k\pi + \pi - x \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{5}, k \in \mathbb{Z} \\ 4x = 2k\pi - (\pi - x) \Rightarrow x = \frac{(2k-1)\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

اکنون اگر بخواهیم جواب های واقع در بازه  $[0, \pi]$  را بیابیم، می توانیم به ازای مقادیر مختلف  $k$  جواب ها را مشخص کنیم:

| k                     | ۰               | ۱                | ۲     |
|-----------------------|-----------------|------------------|-------|
| $\frac{(2k+1)\pi}{5}$ | $\frac{\pi}{5}$ | $\frac{3\pi}{5}$ | $\pi$ |

| k                     | ۱               | ۲     |
|-----------------------|-----------------|-------|
| $\frac{(2k-1)\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\pi$ |

با توجه به مشترک بودن  $x = \pi$  در این جواب ها، معادله در بازه  $[0, \pi]$  چهار جواب دارد:  $x = \frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \pi, \frac{\pi}{3}$ .

تست

راه حل

معادله  $\cos 4x + \sin x = 0$  چند جواب در بازه  $[0, \pi]$  دارد؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

معادله را به صورت زیر بازنویسی می کنیم:

$$\cos 4x = -\sin x \Rightarrow \cos 4x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \Rightarrow \begin{cases} 4x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + x \Rightarrow x = \frac{(4k+1)\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \\ 4x = 2k\pi - \left(\frac{\pi}{2} + x\right) \Rightarrow x = \frac{(4k-1)\pi}{10}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

اکنون اگر بخواهیم جواب های واقع در بازه  $[0, \pi]$  را بیابیم، می توانیم به ازای مقادیر مختلف  $k$  جواب ها را مشخص کنیم:

| k                     | ۰               | ۱                |
|-----------------------|-----------------|------------------|
| $\frac{(4k+1)\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{5\pi}{6}$ |

| k                      | ۱                 | ۲                 |
|------------------------|-------------------|-------------------|
| $\frac{(4k-1)\pi}{10}$ | $\frac{3\pi}{10}$ | $\frac{7\pi}{10}$ |

بنابراین معادله مورد نظر چهار جواب در بازه  $[0, \pi]$  دارد.

تست

راه حل

معادله  $\tan 3x = \cot \Delta x$  در بازه  $[0, \pi]$  چند جواب دارد؟

۱۰ (۴)

۸ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

ابتدا نسبت مثلثاتی کتانژانت را به تانژانت تبدیل می کنیم و سپس معادله را حل می کنیم:

$$\tan 3x = \cot \Delta x \Rightarrow \tan 3x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \Delta x\right) \Rightarrow 3x = k\pi + \left(\frac{\pi}{2} - \Delta x\right) \Rightarrow 4x = k\pi + \frac{\pi}{2} = (2k+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{8}$$

برای پیدا کردن تعداد جواب ها در بازه  $[0, \pi]$  به شکل زیر عمل می کنیم:

$$0 \leq \frac{(2k+1)\pi}{8} \leq \pi \Rightarrow 0 \leq 2k+1 \leq 8 \Rightarrow -1 \leq 2k \leq 7 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{7}{2} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k \in \{0, 1, 2, \dots, 3\}$$

بنابراین معادله مورد نظر در بازه  $[0, \pi]$  هشت جواب دارد.

نکته

- (۱) برای حل معادله  $\sin x = m$  که  $-1 \leq m \leq 1$ ، کافی است زاویه  $\alpha$  را طوری پیدا کنیم که  $\sin \alpha = m$ ، سپس معادله  $\sin x = \sin \alpha$  را حل کنیم.
- (۲) برای حل معادله  $\cos x = m$  که  $-1 \leq m \leq 1$ ، کافی است زاویه  $\alpha$  را طوری پیدا کنیم که  $\cos \alpha = m$ ، سپس معادله  $\cos x = \cos \alpha$  را حل کنیم.

تست

راه حل

جواب های کلی معادله  $\sqrt{2} \sin 2x - 1 = 0$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

$k\pi + \frac{3\pi}{8}, k\pi - \frac{\pi}{8}$  (۴)

$k\pi + \frac{3\pi}{8}, k\pi + \frac{\pi}{8}$  (۳)

$k\pi + \frac{\pi}{8}, k\pi - \frac{\pi}{8}$  (۲)

$k\pi + \frac{5\pi}{8}, k\pi + \frac{\pi}{8}$  (۱)

$$\sqrt{2} \sin 2x = 1 \Rightarrow \sin 2x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sin 2x = \sin \frac{\pi}{4}$$

معادله را به صورت مقابل می نویسیم:

بنابراین جواب های کلی معادله به صورت مقابل هستند:  $2x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{8}, k \in \mathbb{Z}$ ،  $2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi + \frac{3\pi}{8}, k \in \mathbb{Z}$

نکته

برای پیدا کردن جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی در بازهٔ  $[a, b]$  می‌توانیم پس از پیدا کردن جواب‌های کلی  $x$ ، نامعادلهٔ  $a \leq x \leq b$  را حل کنیم و مقادیر  $k$  را پیدا کنیم. در مورد بازه‌های دیگر نیز به همین ترتیب عمل می‌کنیم.

تست ۱۰

معادلهٔ  $\cos(x - \frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  چند جواب در بازهٔ  $[-\frac{5\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$  دارد؟

- ۱) ۲      ۲) ۵      ۳) ۴      ۴) ۶

راه‌حل

ابتدا جواب‌های کلی معادلهٔ مورد نظر را به‌دست می‌آوریم. توجه کنید که  $-\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{5\pi}{6}$ ، بنابراین معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$\cos(x - \frac{\pi}{3}) = \cos \frac{5\pi}{6} \Rightarrow x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi \pm \frac{5\pi}{6}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = 2k\pi - \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \frac{7\pi}{6}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

بنابراین جواب‌ها عبارت‌اند از  
اکنون از این جواب‌ها، آن‌هایی را پیدا می‌کنیم که در بازهٔ  $[-\frac{5\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$  هستند. توجه کنید که

$$-\frac{5\pi}{2} \leq 2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq \frac{3\pi}{2} \Rightarrow -2\pi \leq 2k\pi \leq 2\pi \Rightarrow -1 \leq k \leq 1, \quad k \in \mathbb{Z}$$

در نتیجه، در این حالت جواب‌ها عبارت‌اند از  $-\frac{\pi}{2}$  و  $-\frac{\pi}{2} - 2\pi$ ، همچنین  $2\pi - \frac{\pi}{2}$ .

$$-\frac{5\pi}{2} \leq 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \leq \frac{3\pi}{2} \Rightarrow -\frac{11\pi}{6} \leq 2k\pi \leq \frac{\pi}{3} \Rightarrow -\frac{11}{6} \leq k \leq \frac{1}{6}, \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = -1, 0.$$

در نتیجه، در این حالت جواب‌ها عبارت‌اند از  $-\frac{\pi}{2} + 2\pi$  و  $-\frac{\pi}{2}$ . بنابراین معادلهٔ مورد نظر در بازهٔ  $[-\frac{5\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$  پنج جواب دارد.

تست ۱۱

اختلاف جواب‌های معادلهٔ  $3 \tan^2(\pi x + \frac{\pi}{8}) - 1 = 0$  در بازهٔ  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  چقدر است؟

- ۱)  $\frac{1}{4}$       ۲)  $\frac{1}{3}$       ۳)  $\frac{1}{2}$       ۴) ۱

راه‌حل

معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$\tan^2(\pi x + \frac{\pi}{8}) = \frac{1}{3} \Rightarrow \tan(\pi x + \frac{\pi}{8}) = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan(\pm \frac{\pi}{6})$$

بنابراین جواب کلی معادله به‌صورت زیر است

$$\pi x + \frac{\pi}{8} = k\pi \pm \frac{\pi}{6} \Rightarrow x + \frac{1}{8} = k \pm \frac{1}{6} \Rightarrow x = k + \frac{1}{24}, \quad x = k - \frac{7}{24}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

به‌ازای  $k=0$  جواب‌های واقع در بازهٔ  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  به‌دست می‌آیند که  $-\frac{7}{24}$  و  $\frac{1}{24}$  هستند و اختلاف آنها برابر  $\frac{1}{3}$  است.

نکته

معادله‌های  $\sin x = m$  و  $\cos x = m$  به‌ازای  $m$  هایی که در بازهٔ  $[-1, 1]$  نیستند، جواب ندارند.

تست ۱۲

به‌ازای چه مقادیری از  $k$  معادلهٔ  $2 \cos x + 3k = 1$  جواب دارد؟

- ۱)  $0 \leq k \leq \frac{4}{3}$       ۲)  $-1 \leq k \leq 1$       ۳)  $-1 \leq k \leq \frac{1}{3}$       ۴)  $-\frac{1}{3} \leq k \leq 1$

راه‌حل

توجه کنید که  $2 \cos x + 3k = 1$  در نتیجهٔ  $\cos x = \frac{1-3k}{2}$  و چون  $-1 \leq \cos x \leq 1$ ، پس

$$-1 \leq \frac{1-3k}{2} \leq 1 \Rightarrow -2 \leq 1-3k \leq 2 \Rightarrow -3 \leq -3k \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{3} \leq k \leq 1$$



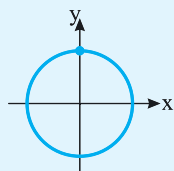
### معادلات مثلثاتی خاص

در برخی معادلات مثلثاتی، جواب‌های کلی را می‌توان به صورت یک دسته جواب نوشت. مثلاً، معادله مثلثاتی  $\sin x = 1$  را در نظر بگیرید. توجه کنید که

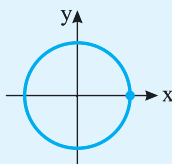
$$\sin x = 1 \Rightarrow \sin \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}, \quad x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{2} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{2} = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

بنابراین جواب‌های کلی این معادله به صورت  $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$  هستند. جواب‌های کلی معادلات خاص را در نکته زیر آورده‌ایم.

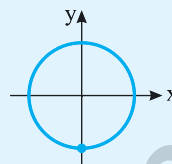
#### معادلات مثلثاتی خاص



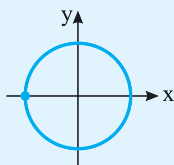
$$\sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$



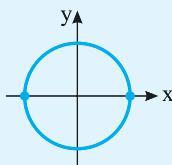
$$\cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$



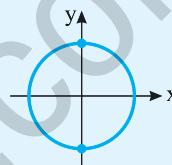
$$\sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$



$$\cos x = -1 \Rightarrow x = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$$



$$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$



$$\cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

جواب‌های کلی معادله  $\sin x \cos 2x = 0$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

۴)  $k\pi, k\pi - \frac{\pi}{4}$

۳)  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, 2k\pi$

۲)  $k\pi, k\pi + \frac{\pi}{4}$

۱)  $k\pi, \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

$$\sin x \cos 2x = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}, \quad \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

توجه کنید که

تست ۱۳

راه‌حل

نمودار تابع  $y = 3 \sin(\frac{\pi}{4} - 2x)$  روی بازه  $[-\pi, \frac{3\pi}{4}]$  در چند نقطه محور  $x$  را قطع می‌کند؟

۴) ۵

۳) ۴

۲) ۳

۱) ۲

$$\sin(\frac{\pi}{4} - 2x) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{4} - 2x = k\pi \Rightarrow 2x = -k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = -\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}, k \in \mathbb{Z}$$

جایی که نمودار محور  $x$  را قطع می‌کند،  $y = 0$  پس

|   |                 |                   |                   |                  |                   |
|---|-----------------|-------------------|-------------------|------------------|-------------------|
| k | ۰               | ۱                 | ۲                 | -۱               | -۲                |
| x | $\frac{\pi}{8}$ | $-\frac{3\pi}{8}$ | $-\frac{5\pi}{8}$ | $\frac{3\pi}{8}$ | $-\frac{7\pi}{8}$ |

جواب‌های واقع در بازه  $[-\pi, \frac{3\pi}{4}]$  عبارت‌اند از

تست ۱۴

راه‌حل

معادله  $\cos x + \sin 4x = 2$  در بازه  $[0, \pi]$  چند جواب دارد؟

۴) ۳

۳) ۲

۲) ۱

۱) صفر

توجه کنید که همواره  $\cos x \leq 1$  و  $\sin 4x \leq 1$ . بنابراین  $\cos x + \sin 4x \leq 2$ . در نتیجه، اگر  $\cos x + \sin 4x = 2$ ، آن‌گاه  $\cos x = 1$  و  $\sin 4x = 1$ .

$$\cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi \xrightarrow{x \in [0, \pi]} x = 0$$

$$\sin 4x = 1 \Rightarrow 4x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \xrightarrow{x \in [0, \pi]} x = \frac{\pi}{8}, x = \frac{5\pi}{8}$$

چون دو معادله جواب مشترک ندارند، پس معادله اصلی جواب ندارد.

تست ۱۵

راه‌حل

نکته

گاهی می‌توان چند مجموعه جواب کلی معادله مثلثاتی را به صورت یک مجموعه جواب کلی نوشت.

مثال: مجموعه جواب‌های معادله  $\sin \frac{x}{2} (\cos x + 1) = 0$  به صورت زیر است:

$$\sin \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = k\pi \Rightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \quad \cos x = -1 \Rightarrow x = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$$

چون مضارب زوج  $\pi$  و مضارب فرد  $\pi$  جواب‌های این معادله هستند، مجموعه جواب‌های این معادله را می‌توان به صورت مضارب صحیح  $\pi$  نوشت، که می‌شود  $x = k\pi, (k \in \mathbb{Z})$ .

تست ۱۶

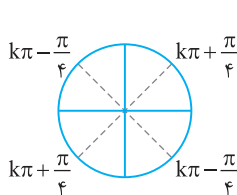
جواب‌های کلی معادله  $2 \sin^2 x - 1 = 0$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

(۱)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$  (۲)  $(2k+1)\pi \pm \frac{\pi}{4}$  (۳)  $k\pi + \frac{\pi}{4}$  (۴)  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

$$2 \sin^2 x - 1 = 0 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

بنابراین  $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$  (۱)،  $x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$  (۲)

همین‌طور،  $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin(-\frac{\pi}{4}) \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$  (۳)،  $x = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$  (۴)



اکنون توجه کنید که اجتماع جواب‌های (۱) و (۴) را می‌توان به صورت  $k\pi + \frac{\pi}{4}$  نوشت. همین‌طور، اجتماع جواب‌های (۲) و (۳) به صورت  $k\pi - \frac{\pi}{4}$  است. بنابراین جواب‌های کلی معادله مورد نظر به صورت  $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$  است که می‌توان با توجه به شکل روبه‌رو آن‌ها را به صورت  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, (k \in \mathbb{Z})$  نوشت.

راه‌حل دوم چون  $1 - 2 \sin^2 x = \cos 2x$ ، معادله مورد نظر را می‌توان به صورت  $-\cos 2x = 0$  نوشت، که مجموعه جواب‌های آن به صورت زیر است:

$$2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

تست ۱۷

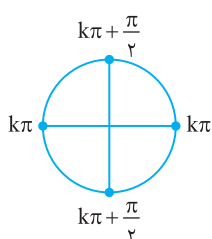
جواب‌های کلی معادله  $\cos^3 x - \cos x = 0$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

(۱)  $k\pi$  (۲)  $k\pi + \frac{\pi}{2}$  (۳)  $\frac{k\pi}{2}$  (۴)  $2k\pi + \frac{\pi}{2}$

$$\cos^3 x - \cos x = 0 \Rightarrow \cos x (\cos^2 x - 1) = 0 \Rightarrow \cos x (\cos x - 1)(\cos x + 1) = 0$$

بنابراین  $\cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ ،  $\cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ،  $\cos x = -1 \Rightarrow x = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$

توجه کنید که اجتماع دو جواب آخر را می‌توان به صورت  $k\pi, (k \in \mathbb{Z})$  نوشت.



بنابراین جواب‌های کلی معادله مورد نظر عبارت‌اند از  $k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

که با توجه به شکل روبه‌رو می‌توان آن‌ها را به صورت  $\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$  نوشت.

راه‌حل دوم معادله مورد نظر را می‌توان به شکل مقابل نوشت  $\cos x (\cos^2 x - 1) = 0 \Rightarrow -\cos x \sin^2 x = 0$

بنابراین  $\cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ ،  $\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

که مشابه راه‌حل اول می‌توان مجموعه جواب‌ها را به صورت  $\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$  نوشت.

نکته

برخی معادله‌های مثلثاتی را می‌توانیم با استفاده از اتحادها به معادله‌های ساده مثلثاتی تبدیل و حل کنیم.

تست

جواب‌های کلی معادله  $\tan x - 3 \cot x = 0$  کدام است؟

(۴)  $\frac{k\pi}{6}$

(۳)  $\frac{k\pi}{3}$

(۲)  $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

(۱)  $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

راه‌حل

معادله را برحسب  $\tan x$  می‌نویسیم:

$$\tan x - 3 \cot x = 0 \Rightarrow \tan x - \frac{3}{\tan x} = 0$$

$$\frac{\tan^2 x - 3}{\tan x} = 0 \Rightarrow \tan^2 x - 3 = 0 \Rightarrow \tan^2 x = 3$$

$$\tan x = \pm \sqrt{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

تست

معادله  $2 \cos^2 x = \cos x + 1$  در بازه  $[0, 2\pi]$  چند جواب دارد؟

(۴) ۵

(۳) ۲

(۲) ۳

(۱) ۴

راه‌حل

توجه کنید که

$$2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0 \Rightarrow (\cos x - 1)(2 \cos x + 1) = 0$$

$$\begin{cases} \cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = 0, 2\pi \\ \cos x = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \end{cases}$$

معادله مورد نظر چهار جواب در بازه  $[0, 2\pi]$  دارد.

تست

جواب‌های کلی معادله  $\cos^2 x + \sin x - \frac{1}{4} = 0$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

(۴)  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$

(۳)  $2k\pi - \frac{7\pi}{6}, 2k\pi + \frac{7\pi}{6}$

(۲)  $2k\pi - \frac{\pi}{6}, 2k\pi + \frac{7\pi}{6}$

(۱)  $2k\pi - \frac{\pi}{6}, 2k\pi + \frac{\pi}{6}$

راه‌حل

ابتدا توجه کنید که  $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ ، در نتیجه، معادله مورد نظر می‌شود

$$1 - \sin^2 x + \sin x - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \sin^2 x - \sin x - \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow (\sin x + \frac{1}{2})(\sin x - \frac{3}{2}) = 0 \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{2}, \sin x = \frac{3}{2} \text{ (غ.ق.)}$$

از طرف دیگر،

$$\sin x = -\frac{1}{2} = \sin(-\frac{\pi}{6}) \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}, \quad x = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{7\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$$

تست

جواب‌های کلی معادله  $\sin 6x = 2 \sin 3x$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

(۴)  $2k\pi + \frac{\pi}{3}$

(۳)  $k\pi + \frac{\pi}{3}$

(۲)  $\frac{k\pi}{3}$

(۱)  $\frac{2k\pi}{3}$

راه‌حل

ابتدا توجه کنید که  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ ، در نتیجه، معادله مورد نظر می‌شود

$$2 \sin 3x \cos 3x = 2 \sin 3x \Rightarrow 2 \sin 3x (\cos 3x - 1) = 0$$

بنابراین

$$\sin 3x = 0 \Rightarrow 3x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}, \quad \cos 3x = 1 \Rightarrow 3x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

توجه کنید که  $\frac{2k\pi}{3}$  مضارب زوج  $\frac{\pi}{3}$  و  $\frac{k\pi}{3}$  همه مضارب صحیح  $\frac{\pi}{3}$  هستند. بنابراین مجموعه جواب‌های کلی معادله مورد نظر  $\frac{k\pi}{3}$  است ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

تست ۲۲

جواب‌های کلی معادله  $\cos 2x = 1 + \sin x$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

- (۱)  $k\pi - \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{\pi}{6}$  (۲)  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$   
(۳)  $k\pi, 2k\pi - \frac{\pi}{6}, (2k+1)\pi + \frac{\pi}{6}$  (۴)  $2k\pi - \frac{\pi}{6}, 2k\pi + \frac{\pi}{6}$

راه‌حل

ابتدا توجه کنید که  $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$ . بنابراین معادله مورد نظر می‌شود

$$1 - 2\sin^2 x = 1 + \sin x \Rightarrow \sin x(1 + 2\sin x) = 0$$

$$\begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 1 + 2\sin x = 0 \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{2} = \sin(-\frac{\pi}{6}) \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}, \quad x = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

در نتیجه

تست ۲۳

معادله  $\sin^4 x - \sin x = \cos^4 x$  در بازه  $[-\pi, 0]$  چند جواب دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

راه‌حل

معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin^4 x - \cos^4 x = \sin x \Rightarrow (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = \sin x \Rightarrow -\cos 2x = \sin x \Rightarrow \cos 2x = \sin(-x)$$

$$\cos 2x = \cos(\frac{\pi}{2} + x) \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + x \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow x = \frac{2k\pi - \pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

جواب‌های واقع در بازه  $[-\pi, 0]$  عبارت‌اند از  $x = -\frac{\pi}{6}$  و  $x = -\frac{5\pi}{6}$ . بنابراین معادله در بازه  $[-\pi, 0]$  دو جواب دارد.

تست ۲۴

جواب‌های کلی معادله  $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2}$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

- (۱)  $k\pi - \frac{\pi}{4}$  (۲)  $k\pi + \frac{\pi}{4}$  (۳)  $\frac{k\pi}{4}$  (۴)  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

راه‌حل

معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - 2(\sin x \cos x)^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow -2(\frac{1}{2} \sin 2x)^2 = \frac{-1}{2} \Rightarrow \frac{1 - \cos 4x}{2} = 1 \Rightarrow \cos 4x = -1$$

$$4x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت مقابل هستند:

تست ۲۵

تعداد جواب‌های معادله  $\sin 5x \cos 2x - \cos 5x \sin 2x = -\frac{1}{2}$  در بازه  $(-\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6})$  چند تاست؟

- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۱۰

راه‌حل

با استفاده از دستور سینوس تفاضل دو زاویه می‌توان معادله مورد نظر را به صورت زیر نوشت:

$$\sin(5x - 2x) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin 3x = -\frac{1}{2} = \sin(-\frac{\pi}{6})$$

جواب‌های کلی این معادله به صورت زیر است:

$$3x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{18}, k \in \mathbb{Z}, \quad 3x = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = (2k+1)\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{18}, k \in \mathbb{Z}$$

اکنون جواب‌های واقع در بازه  $(-\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6})$  را پیدا می‌کنیم:

$$-\frac{\pi}{6} < \frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{18} < \frac{11\pi}{6} \Rightarrow -\frac{1}{6} < k < \frac{17}{6} \Rightarrow k = 0, 1, 2$$

$$-\frac{\pi}{6} < (2k+1)\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{18} < \frac{11\pi}{6} \Rightarrow -\frac{5}{6} < k < \frac{13}{6} \Rightarrow k = 0, 1, 2$$

بنابراین معادله مورد نظر در بازه  $(-\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6})$  شش جواب دارد.

تست  
□□□□

جواب‌های کلی معادله  $\sin(\frac{\pi}{6}+x)+\sin(\frac{\pi}{6}-x)=\frac{1}{2}$  کدام است؟

- (۱)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$  (۲)  $k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{3}$  (۳)  $k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{6}$  (۴)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

را حل

اگر از دستوره‌های سینوس مجموع و تفاضل دو زاویه استفاده کنیم، معلوم می‌شود که

$$\sin(\frac{\pi}{6}+x) = \sin \frac{\pi}{6} \cos x + \cos \frac{\pi}{6} \sin x = \frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x$$

$$\sin(\frac{\pi}{6}-x) = \sin \frac{\pi}{6} \cos x - \cos \frac{\pi}{6} \sin x = \frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x$$

$$\cos x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

بنابراین معادله مورد نظر می‌شود

تست  
□□□□

مجموع جواب‌های معادله  $\sin x + \cos x = 1$  که در بازه  $[0, 2\pi]$  قرار دارند، کدام است؟

- (۱)  $2\pi$  (۲)  $\frac{5\pi}{2}$  (۳)  $4\pi$  (۴)  $\Delta\pi$

را حل

را حل اول اگر طرفین معادله را بر  $\sqrt{2}$  تقسیم کنیم، معادله به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos \frac{\pi}{4} \sin x + \sin \frac{\pi}{4} \cos x = \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) = \sin \frac{\pi}{4}$$

$$x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi, \quad x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$$

بنابراین جواب‌های معادله به صورت مقابل هستند:

در نتیجه جواب‌های واقع در بازه  $[0, 2\pi]$  عبارت‌اند از  $0$ ،  $2\pi$  و  $\frac{5\pi}{2}$  که مجموع آن‌ها برابر  $\frac{5\pi}{2}$  است.

را حل دوم طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم و آن را به صورت مقابل می‌نویسیم:

$$\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 1 \Rightarrow 2 \sin x \cos x = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = 0, \pi, 2\pi, \quad \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

بنابراین جواب‌هایی که در بازه  $[0, 2\pi]$  قرار دارند، به صورت مقابل هستند:

توجه کنید که جواب‌های  $\pi$  و  $\frac{3\pi}{2}$  قابل قبول نیستند، زیرا در معادله اصلی صدق نمی‌کنند. این جواب‌ها به دلیل اینکه طرفین معادله را به توان دو رسانده‌ایم، تولید شده‌اند. بنابراین مجموع جواب‌هایی که در بازه  $[0, 2\pi]$  قرار دارند برابر  $\frac{5\pi}{2}$  است.

را حل سوم با استفاده از اتحادهای  $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$  و  $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$  معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin x = 1 - \cos x \Rightarrow 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \sin^2 \frac{x}{2} \Rightarrow \sin \frac{x}{2} (\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}) = 0$$

$$\begin{cases} \sin \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow x = 0, 2\pi \\ \cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

بنابراین جواب‌های معادله که در بازه  $[0, 2\pi]$  قرار دارند، به صورت مقابل هستند:

پس مجموع جواب‌های معادله در این بازه برابر  $\frac{5\pi}{2}$  است.

تست  
□□□□

معادله  $\sin^3 x \sin^2 x - \sin x \cos^4 x = \cos^3 x \cos^2 x + \sin^4 x \cos x$  در بازه  $[-\pi, \pi]$  چند جواب دارد؟

- (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۱

را حل

معادله را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\cos^3 x \cos^2 x - \sin^3 x \sin^2 x = -\sin x \cos^4 x - \sin^4 x \cos x \Rightarrow \cos(3x+2x) = -\sin(x+4x) \Rightarrow \cos 5x = -\sin 5x$$

$$\tan 5x = -1 \Rightarrow 5x = k\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{5} - \frac{\pi}{20}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

برای پیدا کردن جواب‌های واقع در بازه  $[-\pi, \pi]$  می‌توانیم بنویسیم:

$$-\pi \leq \frac{k\pi}{5} - \frac{\pi}{20} \leq \pi \Rightarrow -\frac{19}{4} \leq k \leq \frac{21}{4} \Rightarrow k = \pm 4, \pm 3, \pm 2, \pm 1, 0, 5$$

بنابراین معادله مورد نظر در بازه  $[-\pi, \pi]$  ده جواب دارد.

تست ۲۹

معادله  $\tan 3x - \tan 5x = 1 + \tan 3x \tan 5x$  چند جواب در بازه  $(-\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6})$  دارد؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

را حل

اگر دو طرف معادله داده شده را بر سمت راست آن تقسیم کنیم، نتیجه می‌شود

$$\frac{\tan 3x - \tan 5x}{1 + \tan 3x \tan 5x} = 1 \Rightarrow \tan(3x - 5x) = 1 \Rightarrow \tan(-2x) = 1 \Rightarrow -\tan 2x = 1 \Rightarrow \tan 2x = -1 = \tan(-\frac{\pi}{4})$$

بنابراین  $2x = k\pi - \frac{\pi}{4}$ ، پس  $x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$ ،  $(k \in \mathbb{Z})$ . اکنون توجه کنید که

$$-\frac{\pi}{6} < \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8} < \frac{11\pi}{6} \Rightarrow -\frac{1}{12} < k < \frac{47}{12} \Rightarrow k = 0, 1, 2, 3$$

بنابراین معادله مورد نظر چهار جواب در بازه  $(-\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6})$  دارد.

نکته

تعداد جواب‌های برخی معادلات مثلثاتی را می‌توانیم به کمک رسم نمودار پیدا کنیم.

تست ۳۰

تعداد جواب‌های معادله  $(\sin x + \frac{3}{4})(\cos x - \frac{1}{5}) = 0$  در بازه  $[0, 2\pi]$  کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

را حل

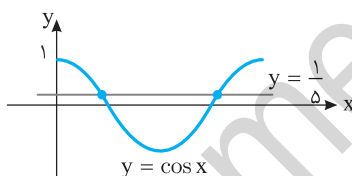
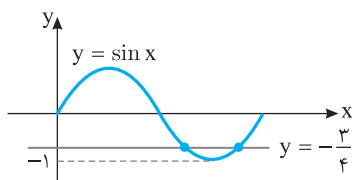
توجه کنید که

$$(\sin x + \frac{3}{4})(\cos x - \frac{1}{5}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = -\frac{3}{4} \\ \cos x = \frac{1}{5} \end{cases}$$

از طرف دیگر، جواب‌های معادله  $\sin x = -\frac{3}{4}$  طول نقطه‌های برخورد نمودار تابع  $y = \sin x$

و خط  $y = -\frac{3}{4}$  هستند. بنابراین از روی شکل مقابل معلوم می‌شود که معادله  $\sin x = -\frac{3}{4}$  در بازه  $[0, 2\pi]$  دو جواب دارد.

به همین ترتیب، از روی شکل مقابل معلوم می‌شود که معادله  $\cos x = \frac{1}{5}$  در بازه  $[0, 2\pi]$  دو جواب دارد. بنابراین معادله مورد نظر در بازه  $[0, 2\pi]$  چهار جواب دارد.



تست ۳۱

معادله  $9 - 13 \sin x = 6 \cos 2x$  در بازه  $[0, 2\pi]$  چند جواب دارد؟

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

را حل

به کمک اتحاد  $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$  معادله را بر حسب  $\sin x$  می‌نویسیم:

$$9 - 13 \sin x = 6(1 - 2 \sin^2 x) \Rightarrow 12 \sin^2 x - 13 \sin x + 3 = 0$$

اکنون اگر فرض کنیم  $t = \sin x$ ، به دست می‌آید:

$$12t^2 - 13t + 3 = 0 \Rightarrow t = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{24} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{3}{4} = \sin x \\ t = \frac{1}{3} = \sin x \end{cases}$$

معادلات  $\sin x = \frac{3}{4}$  و  $\sin x = \frac{1}{3}$  هر کدام در بازه  $[0, 2\pi]$  دو جواب دارند. پس معادله مورد نظر در بازه  $[0, 2\pi]$  چهار جواب دارد.



معادلات مثلثاتی

پرسش‌های چهارگزینه‌ای



کتاب درسی

۵۵۶- جواب‌های کلی معادله  $\sqrt{2} \sin \frac{x}{4} - 1 = 0$  کدام‌اند؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

- (۱)  $\lambda k\pi - \pi$  یا  $\lambda k\pi + \pi$  (۲)  $\lambda k\pi - \pi$  یا  $\lambda k\pi + 2\pi$  (۳)  $\lambda k\pi - \pi$  یا  $\lambda k\pi + 3\pi$  (۴)  $\lambda k\pi + \pi$  یا  $\lambda k\pi + 3\pi$

کتاب درسی

۵۵۷- جواب‌های کلی معادله  $\sqrt{3} \sin x + \sqrt{3} = 0$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

- (۱)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$  (۲)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$  (۳)  $2k\pi - \frac{\pi}{3}$ ,  $2k\pi + \frac{4\pi}{3}$  (۴)  $2k\pi + \frac{\pi}{3}$ ,  $2k\pi + \frac{2\pi}{3}$

کتاب درسی

۵۵۸- جواب‌های کلی معادله  $\sqrt{2} \cos x + 1 = 0$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

- (۱)  $2k\pi \pm \frac{3\pi}{4}$  (۲)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$  (۳)  $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$  (۴)  $k\pi \pm \frac{\pi}{8}$

کتاب درسی

۵۵۹- مجموع جواب‌های معادله  $2 \cos^3 x - 1 = 0$  که در بازه  $(0, \pi)$  قرار دارند، چقدر است؟

- (۱)  $\frac{4\pi}{3}$  (۲)  $\frac{13\pi}{9}$  (۳)  $\frac{2\pi}{3}$  (۴)  $\frac{8\pi}{9}$

کتاب درسی

۵۶۰- مجموع جواب‌های معادله  $2 \sin^2 x - 1 = 0$  که در بازه  $(0, 2\pi)$  قرار دارند، کدام است؟

- (۱)  $\frac{3\pi}{2}$  (۲)  $2\pi$  (۳)  $\frac{5\pi}{2}$  (۴)  $3\pi$

۵۶۱- جواب‌های کلی معادله  $\tan(x - \frac{\pi}{6}) - \sqrt{3} = 0$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

- (۱)  $k\pi + \frac{\pi}{3}$  (۲)  $k\pi + \frac{\pi}{2}$  (۳)  $2k\pi + \frac{\pi}{2}$  (۴)  $2k\pi + \frac{\pi}{3}$

۵۶۲- جواب‌های کلی معادله  $\sqrt{3} \tan(x + \frac{\pi}{4}) + 1 = 0$  کدام است؟

- (۱)  $k\pi - \frac{5\pi}{12}$  (۲)  $k\pi + \frac{\pi}{12}$  (۳)  $k\pi - \frac{\pi}{12}$  (۴)  $k\pi + \frac{5\pi}{12}$

۵۶۳- نمودار تابع  $f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$  در بازه  $(-\frac{\pi}{2}, \pi)$  چند بار محور طول‌ها را قطع می‌کند؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۵۶۴- نمودار تابع  $f(x) = \sin^3 x$  در بازه  $[-\pi, 2\pi]$  چند بار به حداکثر مقدار خود می‌رسد؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۵۶۵- نمودار تابع  $f(x) = -2 \cos 4x$  در بازه  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$  چند بار به حداقل مقدار خود می‌رسد؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۵۶۶- جواب‌های کلی معادله  $\sqrt{2} \sin(x + \frac{7\pi}{36}) = \sqrt{2}$  به صورت  $x = 2k\pi + \frac{i\pi}{18}$  است. مجموعه مقادیر  $i$  کدام است؟ ( $0 < i < 18, k \in \mathbb{Z}$ )

- (۱)  $\{1, 4\}$  (۲)  $\{3, 8\}$  (۳)  $\{1, 10\}$  (۴)  $\{3, 10\}$

۵۶۷- جواب‌های کلی معادله  $\sqrt{12} \cos(x + \frac{\pi}{8}) = \sqrt{12}$  به صورت  $x = 2k\pi + \frac{i\pi}{24}$  است. مجموعه مقادیر  $i$  کدام است؟ ( $-24 < i < 24, k \in \mathbb{Z}$ )

- (۱)  $\{1, -3\}$  (۲)  $\{1, -7\}$  (۳)  $\{3, -7\}$  (۴)  $\{-3, 3\}$

۵۶۸- جواب‌های کلی معادله  $2 \cos^2(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}) - 1 = 0$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

- (۱)  $\frac{k\pi}{3}$  (۲)  $\frac{2k\pi}{3}$  (۳)  $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$  (۴)  $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$



۵۶۹- جواب‌های کلی معادله  $1 - 4 \sin^2(\Delta x - \frac{\pi}{3}) = 0$  به صورت  $x = \frac{k\pi}{5} + \frac{i\pi}{3}$  است. مجموع مقادیر ممکن برای  $i$  کدام است؟ ( $0 < i < 5, k \in \mathbb{Z}$ )

- (۱) ۸ (۲) ۶ (۳) ۴ (۴) ۳

۵۷۰- جواب‌های کلی معادله  $3 \tan^2 x - 1 = 0$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

- (۱)  $k\pi + \frac{\pi}{6}$  (۲)  $k\pi - \frac{\pi}{6}$  (۳)  $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$  (۴)  $\frac{k\pi \pm \pi}{2}$

۵۷۱- مجموع جواب‌های معادله  $3 \tan^2(\pi x - \frac{\pi}{8}) - 1 = 0$  در بازه  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{4}$  (۲)  $\frac{1}{3}$  (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴) ۱

۵۷۲- جواب‌های کلی معادله  $\sin \Delta x = \sin 3x$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

- (۱)  $k\pi$  یا  $\frac{k\pi}{4}$  (۲)  $2k\pi$  یا  $\frac{k\pi}{4}$  (۳)  $k\pi$  یا  $\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$  (۴)  $2k\pi$  یا  $\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$

کتاب درسی

۵۷۳- جواب‌های کلی معادله  $\cos 3x = \cos 2x$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

- (۱)  $\frac{2k\pi}{5}$  (۲)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{5}$  (۳)  $\frac{k\pi}{5}$  (۴)  $k\pi \pm \frac{\pi}{5}$

۵۷۴- معادله  $\sin(x - \frac{\pi}{3}) - \sin(x + \frac{\pi}{4}) = 0$  چند جواب در بازه  $(-2\pi, 2\pi)$  دارد؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

کتاب درسی

۵۷۵- معادله  $\cos 2x - \cos(x + \frac{\pi}{4}) = 0$  چند جواب در بازه  $(-\pi, \pi)$  دارد؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

۵۷۶- معادله  $\tan(x - \frac{\pi}{6}) - \tan 2x = 0$  چند جواب در بازه  $(-\pi, \pi)$  دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۵۷۷- مجموع جواب‌های معادله  $\tan 3x = \tan(x - \frac{\pi}{3})$  در بازه  $(0, 2\pi)$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{13\pi}{3}$  (۲)  $\frac{5\pi}{3}$  (۳)  $\frac{20\pi}{3}$  (۴)  $\frac{9\pi}{2}$

۵۷۸- معادله  $\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{2x}{3} = 0$  چند جواب دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۵۷۹- جواب‌های کلی معادله  $\cos(2x - \frac{\pi}{9}) = -\sin 2x$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

- (۱)  $\frac{k\pi}{2} + \frac{7\pi}{36}$  (۲)  $\frac{k\pi}{2} - \frac{7\pi}{36}$  (۳)  $\frac{k\pi}{2} - \frac{7\pi}{72}$  (۴)  $\frac{k\pi}{2} + \frac{7\pi}{72}$

۵۸۰- معادله  $\tan 2x = \cot x$  چند جواب در بازه  $(0, 2\pi)$  دارد؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۸

۵۸۱- معادله  $\cos 2x (\sin 2x + 1) = 0$  در بازه  $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$  چند جواب متمایز دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۵۸۲- جواب‌های کلی معادله  $\sin 2x \cos 2x - \sin 2x = 0$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

- (۱)  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$  (۲)  $\frac{k\pi}{2}$  (۳)  $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$  (۴)  $\frac{k\pi}{4}$

کتاب درسی

۵۸۳- مجموع جواب‌های معادله  $2 \sin^2 x = \sin x$  در بازه  $(0, 2\pi)$  کدام است؟

- (۱)  $\pi$  (۲)  $2\pi$  (۳)  $\frac{7\pi}{6}$  (۴)  $\frac{11\pi}{6}$

۵۸۴- معادله  $2\cos^3 x - \cos x = 0$  در بازه  $(0, 2\pi)$  چند جواب دارد؟

- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۱۰

کتاب درسی

۵۸۵- جواب‌های کلی معادله  $2\sin^2 2x - 5\sin 2x + 3 = 0$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

- (۱)  $k\pi - \frac{\pi}{4}$  (۲)  $k\pi + \frac{\pi}{4}$  (۳)  $2k\pi + \frac{\pi}{2}$  (۴)  $2k\pi - \frac{\pi}{2}$

کتاب درسی

۵۸۶- بزرگ‌ترین جواب معادله  $2\cos^2 2x + 3\cos 2x + 1 = 0$  در بازه  $[0, 2\pi]$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{4\pi}{3}$  (۲)  $\frac{3\pi}{5}$  (۳)  $\frac{7\pi}{5}$  (۴)  $\frac{5\pi}{3}$

۵۸۷- معادله  $\tan^2 x - (\sqrt{3}+1)\tan x + \sqrt{3} = 0$  در بازه  $(0, 2\pi)$  چند جواب دارد؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

۵۸۸- جواب‌های کلی معادله  $3\tan^2 x - 4\sqrt{3}\tan x + 3 = 0$  به صورت  $x = k\pi + \frac{n\pi}{6}$  هستند.  $n$  چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟

( $0 < n < 6, k, n \in \mathbb{Z}$ )

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۵۸۹- جواب‌های کلی معادله  $\sin^2(\pi+x) - \sin x - 2 = 0$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

- (۱)  $k\pi - \frac{\pi}{2}$  (۲)  $k\pi + \frac{\pi}{2}$  (۳)  $2k\pi - \frac{\pi}{2}$  (۴)  $2k\pi + \frac{\pi}{2}$

۵۹۰- معادله  $2\cos^2 x + 3\sin x - 3 = 0$  چند جواب متمایز در بازه  $(0, \pi)$  دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۵۹۱- معادله  $(3\cos x + 1)(5\cos x - 4) = 0$  چند جواب در بازه  $[0, \frac{3\pi}{2}]$  دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۵۹۲- معادله  $\sin x = m \cos x$  چند جواب در بازه  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) صفر (۴) بستگی به مقدار  $m$  دارد.

۵۹۳- معادله  $2\sin^2 x - \cos^2 x - \cos x = 0$  چند جواب متمایز در بازه  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$  دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

کتاب درسی

۵۹۴- مجموع جواب‌های معادله  $\sin 4x = \sqrt{2}\sin 2x$  در بازه  $[0, \pi]$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{13\pi}{8}$  (۲)  $\frac{15\pi}{8}$  (۳)  $\frac{20\pi}{8}$  (۴)  $\frac{23\pi}{8}$

۵۹۵- کدام گزینه جواب معادله  $\sin^2(x + \frac{\pi}{4}) - \cos^2(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$  نیست؟

- (۱)  $-\frac{2\pi}{3}$  (۲)  $\frac{\pi}{6}$  (۳)  $\frac{2\pi}{3}$  (۴)  $\frac{\pi}{3}$

۵۹۶- جواب‌های کلی معادله  $\cos 2x - \sin 2x + 2\sin^2 x = 0$  به کدام صورت است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

- (۱)  $k\pi + \frac{\pi}{4}$  (۲)  $k\pi - \frac{\pi}{4}$  (۳)  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$  (۴)  $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$

کتاب درسی

۵۹۷- معادله  $\cos 2x = \cos^2 x$  چند جواب در بازه  $[0, 2\pi]$  دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۵۹۸- مجموع جواب‌های معادله  $1 + \sin(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}) = \cos(3\pi - x)$  که در بازه  $(0, 2\pi)$  قرار دارند، کدام است؟

- (۱)  $\frac{2\pi}{3}$  (۲)  $\pi$  (۳)  $\frac{4\pi}{3}$  (۴)  $\frac{7\pi}{3}$



۵۹۹- معادله  $\tan x = \frac{1}{\cos x}$  در بازه  $(-\pi, \pi)$  چند جواب دارد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) صفر

۶۰۰- جواب‌های کلی معادله  $\frac{\cos(2x + \frac{\pi}{4})}{\sin 2x} = 1$  کدام است؟  $(k \in \mathbb{Z})$

- ۱ (۱)  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{16}$  ۲ (۲)  $k\pi \pm \frac{\pi}{16}$  ۳ (۳)  $\frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{16}$  ۴ (۴)  $k\pi + \frac{\pi}{16}$

۶۰۱- معادله  $\frac{\sin(x + \frac{\pi}{4})}{\cos 2x} = 1$  در بازه  $(-\pi, \pi)$  چند جواب دارد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۶۰۲- جواب‌های کلی معادله  $4 \sin^2 x = 8 \cos x + 7$  کدام است؟  $(k \in \mathbb{Z})$

- ۱ (۱)  $k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$  ۲ (۲)  $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$  ۳ (۳)  $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$  ۴ (۴)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

۶۰۳- تعداد جواب‌های متمایز معادله  $(2 - \sqrt{2}) \sin^2 x + \cos x - 1 = 0$  در بازه  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۶۰۴- معادله  $\tan 2x \cot x - 1 = 0$  چند جواب در بازه  $[0, \pi]$  دارد؟

- ۱ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۷

۶۰۵- جواب‌های کلی معادله  $\tan x + \cot x = 2$  کدام است؟  $(k \in \mathbb{Z})$

- ۱ (۱)  $2k\pi + \frac{\pi}{4}$  ۲ (۲)  $k\pi + \frac{\pi}{4}$  ۳ (۳)  $\frac{k\pi}{4}$  ۴ (۴)  $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$

۶۰۶- جواب‌های کلی معادله  $\tan(\frac{\pi}{4} + x) + \cot(\frac{\pi}{4} - x) = 2\sqrt{3}$  کدام است؟  $(k \in \mathbb{Z})$

- ۱ (۱)  $k\pi + \frac{\pi}{12}$  ۲ (۲)  $k\pi + \frac{\pi}{24}$  ۳ (۳)  $k\pi + \frac{\pi}{6}$  ۴ (۴)  $k\pi + \frac{\pi}{3}$

۶۰۷- مجموع جواب‌های معادله  $3 \tan x - 3 \cot x = 2\sqrt{3}$  در بازه  $(0, 2\pi)$  کدام است؟

- ۱ (۱)  $\frac{13\pi}{3}$  ۲ (۲)  $\frac{25\pi}{6}$  ۳ (۳)  $\frac{29\pi}{6}$  ۴ (۴)  $\frac{14\pi}{3}$

۶۰۸- جواب‌های کلی معادله  $\sin x + \cos x = \frac{1}{\sin x}$  به صورت  $x = k\pi + \frac{i\pi}{4}$  هستند. مجموعه مقادیر  $i$  کدام است؟  $(0 \leq i < 4, k \in \mathbb{Z})$

- ۱ (۱)  $\{0, 1\}$  ۲ (۲)  $\{1, 2\}$  ۳ (۳)  $\{0, 2\}$  ۴ (۴)  $\{1, 2, 3\}$

۶۰۹- معادله  $3 \sin^2 x + \cos^2 x - (\sqrt{2} - 2) \sin x - (\sqrt{2} + 1) = 0$  در بازه  $(0, 2\pi)$  دارد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (۴)

۶۱۰- مجموع جواب‌های معادله  $4 \sin x + \frac{\sqrt{3}}{\sin x} = 2 + 2\sqrt{3}$  در بازه  $(0, 2\pi)$  کدام است؟

- ۱ (۱)  $2\pi$  ۲ (۲)  $\frac{3\pi}{2}$  ۳ (۳)  $\frac{5\pi}{2}$  ۴ (۴)  $2\pi$

۶۱۱- معادله  $\cos^3 x - 2 \cos^2 x - 3 \cos x = 0$  در بازه  $[0, 2\pi]$  چند جواب متمایز دارد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۶۱۲- جواب‌های کلی معادله  $3 \tan^4 x - 10 \tan^2 x + 3 = 0$  کدام است؟  $(k \in \mathbb{Z})$

- ۱ (۱)  $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$  ۲ (۲)  $\frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{12}$  ۳ (۳)  $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$  ۴ (۴)  $\frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{6}$

- ۶۱۳- معادله  $(\Delta \sin x - 3)(\Delta \cos x - 4) = 0$  چند جواب متمایز در بازه  $(0, 2\pi)$  دارد؟  
 (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶
- ۶۱۴- معادله  $\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin 2x} = 0$  در بازه  $[0, 2\pi]$  چند جواب دارد؟  
 (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶
- ۶۱۵- معادله  $\tan 2x = \sin 4x$  در بازه  $(0, \pi)$  چند جواب دارد؟  
 (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵
- ۶۱۶- جواب‌های کلی معادله  $2 \sin^2 x + \tan^2 x = 2$  کدام است؟  $(k \in \mathbb{Z})$   
 (۱)  $\frac{k\pi}{4}$  (۲)  $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$  (۳)  $\frac{k\pi}{2}$  (۴)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$
- ۶۱۷- معادله  $1 + \sin 2x = (\cos 3x + \sin 3x)^2$  در بازه  $(0, \pi)$  چند جواب دارد؟  
 (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶
- ۶۱۸- معادله  $1 + \cos^4 x = \sin^4 x$  چند جواب در بازه  $(0, 2\pi)$  دارد؟  
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
- ۶۱۹- معادله  $\sin^2 x + \sin^2 2x = 1$  چند جواب متمایز در بازه  $[0, \pi]$  دارد؟  
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
- ۶۲۰- معادله  $\cos^2 2x + \cos^2 6x = 1$  در بازه  $(0, \frac{\pi}{4})$  چند جواب دارد؟  
 (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶
- ۶۲۱- مجموع جواب‌های معادله  $\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{16}{3}$  در بازه  $(0, \pi)$  کدام است؟  
 (۱)  $\pi$  (۲)  $2\pi$  (۳)  $\frac{3\pi}{2}$  (۴)  $\frac{5\pi}{2}$
- ۶۲۲- مجموع جواب‌های معادله  $\cos 2x - \sqrt{2} \cos x - 1 = 0$  که در بازه  $(0, 2\pi)$  قرار دارند، کدام است؟  
 (۱)  $\pi$  (۲)  $2\pi$  (۳)  $\frac{7\pi}{4}$  (۴)  $\frac{9\pi}{4}$
- ۶۲۳- جواب‌های کلی معادله  $\cos x (\cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{7\pi}{5}) = \sin x (\sin \frac{\pi}{5} + \sin \frac{7\pi}{5})$  کدام است؟  $(k \in \mathbb{Z})$   
 (۱)  $k\pi + \frac{7\pi}{10}$  (۲)  $k\pi - \frac{7\pi}{10}$  (۳)  $k\pi - \frac{\pi}{10}$  (۴)  $k\pi + \frac{\pi}{10}$
- ۶۲۴- مجموع جواب‌های معادله  $1 + 2 \sin 2x \cos 3x = 2 \sin 2x \cos 2x$  در بازه  $(0, 2\pi)$  کدام است؟  
 (۱)  $\pi$  (۲)  $\frac{5\pi}{3}$  (۳)  $\frac{5\pi}{6}$  (۴)  $\frac{3\pi}{2}$
- ۶۲۵- مجموع جواب‌های متمایز معادله  $\sin(2x + \frac{\pi}{3}) + \sin(2x - \frac{\pi}{3}) = 1$  در بازه  $(0, 2\pi)$  کدام است؟  
 (۱)  $\frac{\pi}{2}$  (۲)  $\pi$  (۳)  $\frac{3\pi}{2}$  (۴)  $2\pi$
- ۶۲۶- مجموع جواب‌های معادله  $\sin(x + \frac{\pi}{6}) - \sin(x - \frac{\pi}{6}) = \sin 2x$  که در بازه  $[0, 2\pi]$  قرار دارند، کدام است؟  
 (۱)  $\pi$  (۲)  $2\pi$  (۳)  $3\pi$  (۴)  $4\pi$
- ۶۲۷- معادله  $\sin(x + \frac{\pi}{8}) = 2 \sin(x - \frac{\pi}{8})$  چند جواب در بازه  $(0, 2\pi)$  دارد؟  
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
- ۶۲۸- جواب‌های کلی معادله  $\cos(x + \frac{\pi}{3}) \cos(x - \frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2} \cos^2 x$  کدام است؟  $(k \in \mathbb{Z})$   
 (۱)  $\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{2}$  (۲)  $\frac{k\pi}{3}$  (۳)  $k\pi - \frac{\pi}{4}$  (۴)  $k\pi + \frac{\pi}{3}$



- ۶۲۹- معادله  $\tan 2x - \tan x = \frac{\sin x}{\cos 2x}$  در بازه  $[0, 2\pi]$  چند جواب متمایز دارد؟  
 (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵
- ۶۳۰- معادله  $\tan x \tan 3x = 1$  چند جواب در بازه  $(0, \pi)$  دارد؟  
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
- ۶۳۱- معادله  $\tan 2x \tan 4x = 1$  چند جواب در بازه  $(0, \frac{\pi}{2})$  دارد؟  
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
- ۶۳۲- معادله  $\tan x \tan 2x = -1$  در بازه  $(0, 2\pi)$  چند جواب دارد؟  
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر
- ۶۳۳- جواب‌های کلی معادله  $\cot 2x - \tan 2x = 2 \cot x$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )  
 (۱)  $\frac{k\pi}{3}$  (۲)  $k\pi + \frac{\pi}{3}$  (۳)  $k\pi - \frac{\pi}{3}$  (۴)  $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$
- ۶۳۴- مجموع جواب‌های معادله  $\cot x - \tan x = 1 + \cot 2x$  در بازه  $(0, 2\pi)$  کدام است؟  
 (۱)  $\frac{9\pi}{4}$  (۲)  $2\pi$  (۳)  $\frac{5\pi}{2}$  (۴)  $\frac{7\pi}{2}$
- ۶۳۵- مجموع جواب‌های معادله  $\sin x - \sin^3 x = \cos x - \cos^3 x$  در بازه  $[0, 2\pi]$  کدام است؟  
 (۱)  $\frac{9\pi}{2}$  (۲)  $5\pi$  (۳)  $\frac{11\pi}{2}$  (۴)  $\frac{13\pi}{2}$
- ۶۳۶- مجموع جواب‌های متمایز معادله  $\tan 2x + 2 \sin x = 0$  در بازه  $(0, 2\pi)$  کدام است؟  
 (۱)  $2\pi$  (۲)  $3\pi$  (۳)  $4\pi$  (۴)  $5\pi$
- ۶۳۷- چند جواب معادله  $\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} = 1$  در بازه  $[0, 2\pi]$  قرار دارند؟  
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر
- ۶۳۸- جواب‌های کلی معادله  $\sin 4x + \cos 4x = \sqrt{2}$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )  
 (۱)  $\frac{k\pi}{4}$  (۲)  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$  (۳)  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{16}$  (۴)  $\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$
- ۶۳۹- مجموع جواب‌های معادله  $\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = \sqrt{3}$  در بازه  $(0, \pi)$  کدام است؟  
 (۱)  $2\pi$  (۲)  $\frac{\pi}{2}$  (۳)  $3\pi$  (۴)  $\frac{7\pi}{2}$
- ۶۴۰- جواب‌های کلی معادله  $2 \sin^2 x + \sqrt{3} \sin 2x - 3 = 0$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )  
 (۱)  $k\pi + \frac{\pi}{3}$  (۲)  $k\pi - \frac{\pi}{3}$  (۳)  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$  (۴)  $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$
- ۶۴۱- معادله  $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos x} = 2\sqrt{2}$  در بازه  $(0, \pi)$  چند جواب متمایز دارد؟  
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
- ۶۴۲- مجموع جواب‌های معادله  $\tan 2x = 3 \tan x$  در بازه  $(0, 2\pi)$  کدام است؟  
 (۱)  $4\pi$  (۲)  $5\pi$  (۳)  $6\pi$  (۴)  $7\pi$
- ۶۴۳- جواب‌های کلی معادله  $\frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} = \tan 3x$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )  
 (۱)  $k\pi + \frac{\pi}{8}$  (۲)  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$  (۳)  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$  (۴)  $k\pi - \frac{\pi}{4}$
- ۶۴۴- مجموع جواب‌های معادله  $\tan(x + \frac{\pi}{12}) = \tan x + \tan \frac{\pi}{12}$  در بازه  $[0, \pi]$  کدام است؟  
 (۱)  $\frac{23\pi}{21}$  (۲)  $\frac{3\pi}{2}$  (۳)  $\frac{23\pi}{12}$  (۴)  $\frac{11\pi}{12}$

- ۶۴۵- معادله  $\frac{1+\tan^2 2x}{1+\tan^2 x} = \frac{\tan 2x}{1-\tan^2 x}$  چند جواب در بازه  $(0, 2\pi)$  دارد؟  
 (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) صفر
- ۶۴۶- اگر معادله  $3 \sin x + 1 = 2k$  جواب داشته باشد، حدود  $k$  کدام است؟  
 (۱)  $-1 \leq k \leq 2$  (۲)  $-2 \leq k \leq 1$  (۳)  $-2 \leq k \leq 2$  (۴)  $-1 \leq k \leq 1$
- ۶۴۷- معادله  $2 \cos x + k = 3$  در بازه  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  جواب دارد. حدود  $k$  کدام است؟  
 (۱)  $1 \leq k \leq 5$  (۲)  $1 \leq k < 3$  (۳)  $1 < k < 3$  (۴)  $1 \leq k \leq 3$
- ۶۴۸- جواب‌های کلی معادله  $\sin x + \cos 4x = 2$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )  
 (۱)  $\frac{k\pi}{2}$  (۲)  $k\pi + \frac{\pi}{2}$  (۳)  $2k\pi + \frac{\pi}{2}$  (۴)  $\frac{k\pi}{4}$
- ۶۴۹- مجموع جواب‌های معادله  $\cos(2\pi \sin x) = 1$  در بازه  $[0, 2\pi]$  کدام است؟  
 (۱)  $3\pi$  (۲)  $4\pi$  (۳)  $5\pi$  (۴)  $6\pi$
- ۶۵۰- مجموع جواب‌های متمایز معادله  $\sin(\pi \cos x) = 1$  در بازه  $(0, 2\pi)$  کدام است؟  
 (۱)  $\pi$  (۲)  $\frac{3\pi}{2}$  (۳)  $2\pi$  (۴)  $\frac{5\pi}{2}$
- ۶۵۱- جواب‌های کلی معادله  $\tan(\frac{\pi}{4} + x) + \tan(\frac{\pi}{4} - x) = 2$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )  
 (۱)  $\frac{k\pi}{2}$  (۲)  $\frac{k\pi}{4}$  (۳)  $k\pi$  (۴)  $k\pi + \frac{\pi}{2}$
- ۶۵۲- معادله  $\tan(x + \frac{\pi}{3}) = \frac{3 + \sqrt{3}}{\sqrt{3} \tan x - 3}$  چند جواب در بازه  $(0, \frac{\pi}{2})$  دارد؟  
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر



- ۶۵۳- معادله  $\sin x \cos 3x - \sin 5x \cos 2x = \sin 2x \cos 5x - \sin 3x \cos x$  در بازه  $[0, \frac{\pi}{2}]$  چند جواب دارد؟  
 (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶
- ۶۵۴- معادله  $\frac{\sin 6x}{\sin x + \cos x} = \frac{\cos 6x}{\cos x - \sin x}$  چند جواب در بازه  $(0, \frac{\pi}{2})$  دارد؟  
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
- ۶۵۵- معادله  $\sin 5x = \sin 3x \cos 2x + \sin 2x$  چند جواب متمایز در بازه  $[0, \pi]$  دارد؟  
 (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۷
- ۶۵۶- معادله  $\sin 3x - 2 \sin 2x + \sin x = 0$  در بازه  $[0, 2\pi]$  چند جواب متمایز دارد؟  
 (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۶
- ۶۵۷- جواب‌های کلی معادله  $\tan 2x - \tan x = \sin x$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )  
 (۱)  $k\pi + \frac{\pi}{4}$  (۲)  $\frac{k\pi}{4}$  (۳)  $k\pi$  (۴)  $k\pi - \frac{\pi}{4}$
- ۶۵۸- معادله  $\tan 2x = \tan x + \frac{1}{\cos x}$  چند جواب در بازه  $(0, 2\pi)$  دارد؟  
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
- ۶۵۹- جواب‌های کلی معادله  $\tan x - \tan 2x + \tan 3x + \tan x \tan 2x \tan 3x = 0$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )  
 (۱)  $\frac{k\pi}{2}$  (۲)  $k\pi$  (۳)  $2k\pi$  (۴)  $3k\pi$



۵۶۰ ۴ معادله را به صورت  $\sin 2x = \frac{1}{2}$  می‌نویسیم.

پس جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند

$$2x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{12}, k \in \mathbb{Z}$$

$$2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi + \frac{5\pi}{12}, k \in \mathbb{Z}$$

اکنون جواب‌های واقع در بازه  $(0, 2\pi)$  را معین می‌کنیم.

| k                           | ۰                | ۱                      | ۲                       |
|-----------------------------|------------------|------------------------|-------------------------|
| $x = k\pi + \frac{\pi}{12}$ | $\frac{\pi}{12}$ | $\pi + \frac{\pi}{12}$ | $2\pi + \frac{\pi}{12}$ |

(غ.ق.ق)

| k                            | ۰                 | ۱                       | ۲                        |
|------------------------------|-------------------|-------------------------|--------------------------|
| $x = k\pi + \frac{5\pi}{12}$ | $\frac{5\pi}{12}$ | $\pi + \frac{5\pi}{12}$ | $2\pi + \frac{5\pi}{12}$ |

(غ.ق.ق)

بنابراین مجموع جواب‌های معادله که در بازه  $(0, 2\pi)$  قرار دارند، برابر است با

$$\frac{\pi}{12} + \pi + \frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} + \pi + \frac{5\pi}{12} = 3\pi$$

۵۶۱ ۲ معادله را به صورت  $\tan(x - \frac{\pi}{6}) = \sqrt{3} = \tan \frac{\pi}{3}$  می‌نویسیم.

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر است:

$$x - \frac{\pi}{6} = k\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

۵۶۲ ۱ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\tan(x + \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{3}} = \tan(-\frac{\pi}{6})$$

بنابراین جواب کلی معادله به صورت زیر است

$$x + \frac{\pi}{4} = k\pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi - \frac{5\pi}{12}$$

۵۶۳ ۲ اگر نمودار تابع  $f$  محور طول‌ها را در نقطه  $X$  قطع کند،  $f(X) = 0$  پس

$$\sin(2x - \frac{\pi}{3}) = 0 \Rightarrow 2x - \frac{\pi}{3} = k\pi \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{6}$$

اکنون جواب‌های واقع در بازه  $(-\frac{\pi}{4}, \pi)$  را به دست می‌آوریم

$$-\frac{\pi}{4} < \frac{(2k+1)\pi}{6} < \pi \Rightarrow -\frac{1}{4} < \frac{2k+1}{6} < 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} < 2k+1 < 6 \Rightarrow -\frac{3}{2} < 2k < 5 \Rightarrow -2 < k < 2.5$$

بنابراین به ازای  $k = -1$  و  $k = 0$ ،  $k = 1$  سه مقدار برای  $X$  به دست می‌آید که طول

نقاط برخورد نمودار تابع  $f$  با محور طول‌هاست.

۵۶۴ ۳ در نقاطی که  $\sin 3x = 1$ ، نمودار تابع  $f$  حداکثر مقدار خود را دارد. پس

$$3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$$

| k | -۱               | ۰               | ۱                | ۲                |
|---|------------------|-----------------|------------------|------------------|
| x | $-\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\frac{3\pi}{2}$ |

بنابراین نمودار تابع  $f$  بار به حداکثر مقدار خود می‌رسد. برای پیدا کردن نقاطی که

نمودار تابع در آنها حداکثر می‌شود، می‌توانیم به شکل زیر نیز عمل کنیم:

$$-\pi \leq (2k+1)\frac{\pi}{6} \leq 2\pi \Rightarrow -6 \leq 2k+1 \leq 12 \Rightarrow -7 \leq 2k \leq 11$$

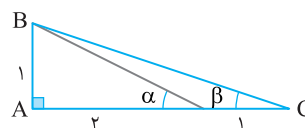
$$-\frac{7}{2} \leq k \leq \frac{11}{2} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k \in \{-1, 0, 1, 2\}$$

۵۵۵ ۲ ابتدا توجه کنید که  $\tan \alpha = \frac{1}{2}$  و  $\tan \beta = \frac{1}{3}$ ، بنابراین

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}} = 1$$

از طرفی، چون  $0 < \tan \alpha, \tan \beta < 1$  و تابع تانژانت روی بازه  $(0, \frac{\pi}{2})$  اکیداً صعودی

است، پس  $0 < \alpha, \beta < 45^\circ$ ، در نتیجه  $0 < \alpha + \beta < 90^\circ$ ، بنابراین  $\alpha + \beta = 45^\circ$ .



۵۵۶ ۴ ابتدا معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin \frac{x}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin \frac{\pi}{4}$$

پس جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$\frac{x}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 8k\pi + \pi$$

$$\frac{x}{4} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 8k\pi + 3\pi$$

۵۵۷ ۳ ابتدا معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$2 \sin x = -\sqrt{3} \Rightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin x = \sin(-\frac{\pi}{3})$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر است:

$$x = 2k\pi - \frac{\pi}{3}, x = 2k\pi + \pi - (-\frac{\pi}{3}) \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{3}, x = 2k\pi + \frac{4\pi}{3}$$

۵۵۸ ۱ ابتدا معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sqrt{2} \cos x = -1 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos x = \cos \frac{3\pi}{4}$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت  $x = 2k\pi \pm \frac{3\pi}{4}$  هستند.

۵۵۹ ۲ ابتدا معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\cos 3x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 3x = \cos \frac{\pi}{3}$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$3x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{2k\pi \pm \frac{\pi}{3}}{3} = \frac{(6k \pm 1)\pi}{9}$$

اکنون جواب‌های واقع در بازه  $(0, \pi)$  را معین می‌کنیم

| k                         | ۰               | ۱                | ۲                 |
|---------------------------|-----------------|------------------|-------------------|
| $x = \frac{(6k+1)\pi}{9}$ | $\frac{\pi}{9}$ | $\frac{7\pi}{9}$ | $\frac{13\pi}{9}$ |

(غ.ق.ق)

| k                         | ۰                | ۱                | ۲                 |
|---------------------------|------------------|------------------|-------------------|
| $x = \frac{(6k-1)\pi}{9}$ | $-\frac{\pi}{9}$ | $\frac{5\pi}{9}$ | $\frac{11\pi}{9}$ |

(غ.ق.ق) (غ.ق.ق)

بنابراین مجموع جواب‌های واقع در بازه  $(0, \pi)$  برابر است با

$$\frac{\pi}{9} + \frac{7\pi}{9} + \frac{5\pi}{9} + \frac{11\pi}{9} = \frac{24\pi}{9}$$

۵۶۵ در نقاطی که  $\cos 4x = 1$ ، تابع  $f$  به حداقل مقدار خود می‌رسد. پس

$$4x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

|   |                  |   |                 |       |                  |
|---|------------------|---|-----------------|-------|------------------|
| k | -۱               | ۰ | ۱               | ۲     | ۳                |
| x | $-\frac{\pi}{2}$ | ۰ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ |

بنابراین نمودار تابع  $f$  بار به حداقل مقدار خود می‌رسد.

۵۶۶ معادله را به صورت  $\sin(x + \frac{7\pi}{36}) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4}$  می‌نویسیم.

بنابراین جواب کلی معادله به صورت زیر است

$$x + \frac{7\pi}{36} = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{18}$$

$$x + \frac{7\pi}{36} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{11\pi}{18}$$

پس  $x$  می‌تواند برابر  $\frac{\pi}{18}$  یا  $\frac{11\pi}{18}$  باشد.

۵۶۷ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\cos(x + \frac{\pi}{8}) = \frac{\sqrt{12}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6}$$

بنابراین جواب کلی معادله به صورت زیر است

$$x + \frac{\pi}{8} = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{24}$$

$$x + \frac{\pi}{8} = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{7\pi}{24}$$

بنابراین  $x$  می‌تواند مقادیر  $\frac{\pi}{24}$  و  $-\frac{7\pi}{24}$  را داشته باشد.

۵۶۸ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\cos^2(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}) = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر است:

$$\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4} = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{3x}{2} = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{3}$$

$$\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4} = k\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{3x}{2} = k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3}$$

پس مضارب زوج و مضارب فرد  $\frac{\pi}{3}$  جواب‌های معادله هستند. در نتیجه جواب

کلی معادله را می‌توان به صورت  $\frac{k\pi}{3}$  نوشت ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

۵۶۹ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\sin^2(\Delta x - \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin(\Delta x - \frac{\pi}{3}) = \pm \frac{1}{2} = \sin(\pm \frac{\pi}{6})$$

بنابراین جواب کلی معادله به صورت زیر است:

$$\Delta x - \frac{\pi}{3} = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

$$\Delta x = k\pi + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{k\pi}{3} + \frac{3\pi}{6}$$

$$\Delta x = k\pi - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$$

بنابراین  $x$  می‌تواند مقادیر  $\frac{\pi}{6}$  و  $\frac{\pi}{2}$  را داشته باشد که مجموع آنها برابر  $\frac{\pi}{3}$  است.

۵۷۰ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$3 \tan^2 x = 1 \Rightarrow \tan^2 x = \frac{1}{3} \Rightarrow \tan x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت  $x = k\pi + \frac{\pi}{6}$  و  $x = k\pi - \frac{\pi}{6}$  هستند.

۵۷۱ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\tan^2(\pi x - \frac{\pi}{8}) = \frac{1}{3} \Rightarrow \tan(\pi x - \frac{\pi}{8}) = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan(\pm \frac{\pi}{6})$$

بنابراین جواب کلی معادله به صورت زیر است

$$\pi x - \frac{\pi}{8} = k\pi \pm \frac{\pi}{6} \Rightarrow x - \frac{1}{8} = k \pm \frac{1}{6} \Rightarrow x = k + \frac{7}{24}, \quad x = k - \frac{1}{24}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

به ازای  $k=0$  جواب‌های واقع در بازه  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  به دست می‌آیند که  $\frac{7}{24}$  و  $-\frac{1}{24}$  هستند و مجموع آنها برابر  $\frac{1}{4}$  است.

۵۷۲ جواب‌های معادله به صورت زیر هستند:

$$\Delta x = 2k\pi + 3x \Rightarrow x = k\pi, \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Delta x = 2k\pi + \pi - 3x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{4}, \quad (k \in \mathbb{Z})$$

۵۷۳ جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند

$$3x = 2k\pi + 2x \Rightarrow x = 2k\pi, \quad 3x = 2k\pi - 2x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{5}$$

جواب‌های به صورت  $\frac{2k\pi}{5}$  شامل جواب‌های به صورت  $2k\pi$  هم هستند. (مثلاً اگر

در  $\frac{2k\pi}{5}$  قرار دهیم  $k=5$  آن‌گاه جواب  $2\pi$  به دست می‌آید که از قرار دادن  $k=1$

در  $2k\pi$  حاصل می‌شود) پس جواب‌های کلی معادله به صورت  $\frac{2k\pi}{5}$  هستند.

۵۷۴ معادله را به صورت  $\sin(x - \frac{\pi}{3}) = \sin(x + \frac{\pi}{4})$  می‌نویسیم.

بنابراین جواب‌های آن به صورت زیر هستند: ( $k \in \mathbb{Z}$ )

$$x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi + x + \frac{\pi}{4} \Rightarrow 2k\pi = -\frac{7\pi}{12} \quad (\text{غ.ق.ق})$$

$$x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \pi - x - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi + \frac{13\pi}{24}$$

اکنون جواب‌های واقع در بازه  $(-2\pi, 2\pi)$  را به دست می‌آوریم

|   |                    |                    |                    |                     |                     |                     |
|---|--------------------|--------------------|--------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| k | ۰                  | ۱                  | ۲                  | -۱                  | -۲                  | -۳                  |
| x | $\frac{13\pi}{24}$ | $\frac{37\pi}{24}$ | $\frac{61\pi}{24}$ | $-\frac{11\pi}{24}$ | $-\frac{35\pi}{24}$ | $-\frac{59\pi}{24}$ |

(غ.ق.ق) (غ.ق.ق)

پس معادله چهار جواب در بازه فوق دارد.

۵۷۵ معادله را به صورت  $\cos 2x = \cos(x + \frac{\pi}{4})$  می‌نویسیم. بنابراین

جواب‌ها به صورت زیر هستند: ( $k \in \mathbb{Z}$ )

$$2x = 2k\pi + x + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{(4k+1)\pi}{4}$$

$$2x = 2k\pi - x - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{12} = \frac{(4k-1)\pi}{12}$$

اکنون مقادیر مختلف و صحیح را به  $k$  می‌دهیم و مقدار  $x$  را حساب می‌کنیم

|                           |                 |                  |                   |
|---------------------------|-----------------|------------------|-------------------|
| k                         | ۰               | ۱                | -۱                |
| $x = \frac{(4k+1)\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{4}$ | $-\frac{3\pi}{4}$ |

(غ.ق.ق) (غ.ق.ق)

|                            |                   |                   |                    |                    |                     |
|----------------------------|-------------------|-------------------|--------------------|--------------------|---------------------|
| k                          | ۰                 | ۱                 | ۲                  | -۱                 | -۲                  |
| $x = \frac{(4k-1)\pi}{12}$ | $-\frac{\pi}{12}$ | $\frac{7\pi}{12}$ | $\frac{11\pi}{12}$ | $-\frac{5\pi}{12}$ | $-\frac{13\pi}{12}$ |

(غ.ق.ق) (غ.ق.ق)

بنابراین معادله در بازه  $(-\pi, \pi)$  چهار جواب دارد.



۵۸۰ ۳ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\tan 2x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

پس جواب‌های معادله به صورت زیر هستند

$$2x = k\pi + \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow x = \frac{k\pi + \frac{\pi}{2}}{3} = \frac{(2k+1)\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$$

اکنون جواب‌های معادله را در بازه  $(0, 2\pi)$  معین می‌کنیم:

| k | ۰               | ۱               | ۲                | ۳                | ۴                | ۵                 | ۶                 |
|---|-----------------|-----------------|------------------|------------------|------------------|-------------------|-------------------|
| x | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\frac{7\pi}{6}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{11\pi}{6}$ | $\frac{13\pi}{6}$ |

(غ.ق.ق)

بنابراین معادله شش جواب در بازه  $(0, 2\pi)$  دارد. توجه کنید که می‌توانیم به روش

زیر نیز عمل کنیم:

$$0 < (2k+1)\frac{\pi}{6} < 2\pi \Rightarrow 0 < 2k+1 < 12 \Rightarrow -\frac{1}{2} < k < \frac{11}{2}$$

$$k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

۵۸۱ ۲ اگر  $\cos 2x = 0$ ، آن‌گاه  $2x = k\pi + \frac{\pi}{2}$  و در نتیجه  $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

که فقط  $x = \pi + \frac{\pi}{4}$  در بازه  $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$  قرار می‌گیرد.

اگر  $\sin 2x = -1$ ، آن‌گاه  $2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ ، در نتیجه  $x = k\pi - \frac{\pi}{4}$  که هیچ‌کدام

از این جواب‌ها در بازه  $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$  قرار نمی‌گیرند.

بنابراین معادله در بازه  $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$  فقط یک جواب دارد.

۵۸۲ ۲ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin 2x (\cos 2x - 1) = 0 \Rightarrow \sin 2x = 0 \text{ یا } \cos 2x = 1$$

بنابراین جواب‌های معادله به صورت زیر هستند:

$$2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}, \quad 2x = 2k\pi \Rightarrow x = k\pi$$

جواب‌های معادله دوم جزء جواب‌های معادله اول هستند، بنابراین جواب‌های

معادله اصلی  $x = \frac{k\pi}{2}$  است.

۵۸۳ ۲ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم

$$2 \sin^2 x - \sin x = 0 \Rightarrow \sin x (2 \sin x - 1) = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \text{ یا } \sin x = \frac{1}{2}$$

بنابراین جواب‌های معادله در بازه  $(0, 2\pi)$  عبارت‌اند از  $\frac{\pi}{6}$  و  $\frac{5\pi}{6}$  که

مجموع آنها برابر  $2\pi$  است.

۵۸۴ ۲ جواب‌های معادله به صورت زیر به دست می‌آید:

$$2 \cos^3 x - \cos x = 0 \Rightarrow \cos x (2 \cos^2 x - 1) = 0$$

$$\cos x = 0, \quad \cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

چون جواب‌های معادله را در بازه  $(0, 2\pi)$  می‌خواهیم، پس این جواب‌ها به صورت

زیر هستند:

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \quad \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$$

بنابراین معادله شش جواب در بازه  $(0, 2\pi)$  دارد.

۵۷۶ ۲ معادله را به صورت  $\tan(x - \frac{\pi}{6}) = \tan 2x$  می‌نویسیم و

جواب‌های آن به صورت زیر هستند

$$2x = k\pi + x - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$$

اکنون تعداد جواب‌های واقع در بازه  $(-\pi, \pi)$  را به دست می‌آوریم. به روش

می‌توان این کار را انجام داد.

راه‌حل اول

| k | ۰                | ۱                | ۲                 | -۱                |
|---|------------------|------------------|-------------------|-------------------|
| x | $-\frac{\pi}{6}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\frac{11\pi}{6}$ | $-\frac{7\pi}{6}$ |

(غ.ق.ق) (غ.ق.ق)

راه‌حل دوم

$$-\pi < k\pi - \frac{\pi}{6} < \pi \Rightarrow -\frac{5\pi}{6} < k\pi < \frac{7\pi}{6} \Rightarrow -\frac{5}{6} < k < \frac{7}{6}, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{0, 1\}$$

بنابراین معادله در بازه  $(-\pi, \pi)$  دو جواب دارد.

۵۷۷ ۲ جواب کلی معادله به صورت زیر است

$$3x = k\pi + x - \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$$

جواب‌های واقع در بازه  $(0, 2\pi)$  را به دست می‌آوریم

| k | ۰                | ۱               | ۲                | ۳                | ۴                 | ۵                |
|---|------------------|-----------------|------------------|------------------|-------------------|------------------|
| x | $-\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{11\pi}{6}$ | $\frac{7\pi}{3}$ |

(غ.ق.ق) (غ.ق.ق)

دقت کنید که  $\frac{5\pi}{6}$  و  $\frac{11\pi}{6}$  غیر قابل قبول هستند، زیرا در دامنه تعریف عبارت‌های معادله

قرار ندارند. بنابراین مجموع جواب‌ها در بازه  $(0, 2\pi)$  برابر است با  $\frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$ .

۵۷۸ ۱ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\sin \frac{x}{2} = \cos \frac{2x}{3} \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) = \cos \frac{2x}{3}$$

بنابراین جواب‌های معادله به صورت زیر هستند

$$\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} = 2k\pi + \frac{2x}{3} \Rightarrow x = \frac{(-12k+3)\pi}{7}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} = 2k\pi - \frac{2x}{3} \Rightarrow x = 12k\pi - 3\pi, k \in \mathbb{Z}$$

اکنون جواب‌های واقع در بازه  $(0, 2\pi)$  را مشخص می‌کنیم. واضح است که

هیچ‌یک از جواب‌های به صورت  $x = 12k\pi - 3\pi$  در بازه  $(0, 2\pi)$  قرار ندارند.

پس جواب‌های به صورت  $x = \frac{(-12k+3)\pi}{7}$  را بررسی می‌کنیم

| k | ۰                | ۱                 | -۱                |
|---|------------------|-------------------|-------------------|
| x | $\frac{3\pi}{7}$ | $\frac{-9\pi}{7}$ | $\frac{15\pi}{7}$ |

(غ.ق.ق) (غ.ق.ق)

بنابراین معادله فقط یک جواب در بازه  $(0, 2\pi)$  دارد.

۵۷۹ ۳ ابتدا معادله را به صورت  $\cos(2x - \frac{\pi}{9}) = \cos(\frac{\pi}{2} + 2x)$  می‌نویسیم.

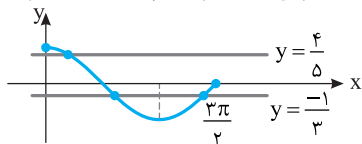
پس جواب کلی معادله به صورت زیر است

$$2x - \frac{\pi}{9} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + 2x \Rightarrow 2k\pi = -\frac{11\pi}{18} \text{ (غ.ق.ق)}$$

$$2x - \frac{\pi}{9} = 2k\pi - \frac{\pi}{2} - 2x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{7\pi}{18}, k \in \mathbb{Z}$$

۵۹۱ با توجه به نمودار تابع  $y = \cos x$  و خطوط  $y = \frac{4}{5}$  و  $y = -\frac{1}{3}$

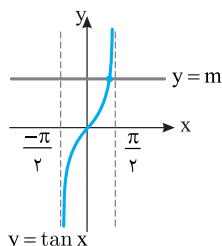
معادله  $\cos x = \frac{4}{5}$  در بازه  $[0, \frac{3\pi}{2}]$  یک جواب دارد و معادله  $\cos x = -\frac{1}{3}$  در این بازه دو جواب دارد. پس معادله مورد نظر مسئله در بازه فوق ۳ جواب دارد.



۵۹۲ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\sin x = m \cos x \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = m \Rightarrow \tan x = m$$

با توجه به نمودار زیر، به ازای هر مقدار  $m$ ، معادله دقیقاً یک جواب دارد.



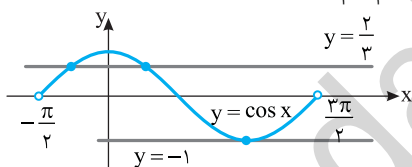
۵۹۳ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم

$$2(1 - \cos^2 x) - \cos^2 x - \cos x = 0 \Rightarrow 3 \cos^2 x + \cos x - 2 = 0$$

$$(\cos x + 1)(3 \cos x - 2) = 0 \Rightarrow \cos x = -1, \cos x = \frac{2}{3}$$

با توجه به نمودار زیر معادله  $\cos x = -1$  یک جواب و معادله  $\cos x = \frac{2}{3}$  دو

جواب در بازه  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$  دارد. پس معادله اصلی ۳ جواب در بازه مورد نظر دارد.



۵۹۴ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم

$$2 \sin 2x \cos 2x = \sqrt{2} \sin 2x \Rightarrow 2 \sin 2x (\cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2}) = 0$$

بنابراین جواب‌های معادله به صورت زیر هستند

$$\sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$$

$$\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{8}$$

جواب‌های واقع در بازه  $[0, \pi]$  عبارت‌اند از  $0, \frac{\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}$ . پس مجموع

جواب‌های واقع در این بازه برابر است با  $\frac{5\pi}{4}$ .

۵۹۵ با توجه به اتحاد  $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$  معادله به

صورت زیر ساده می‌شود

$$-\cos(2x + \frac{\pi}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos(2x + \frac{\pi}{2}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{5\pi}{4}$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر است

$$2x + \frac{\pi}{2} = 2k\pi + \frac{5\pi}{4} \Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi + \frac{3\pi}{8}, k \in \mathbb{Z}$$

$$2x + \frac{\pi}{2} = 2k\pi - \frac{5\pi}{4} \Rightarrow 2x = 2k\pi - \frac{3\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi - \frac{3\pi}{8}, k \in \mathbb{Z}$$

بنابراین جواب این معادله نیست.

۵۸۵ اگر فرض کنیم  $t = \sin 2x$ ، آن‌گاه معادله به صورت  $2t^2 - 5t + 3 = 0$

درمی‌آید و از حل این معادله درجه دوم نتیجه می‌شود  $t = 1$  و  $t = \frac{3}{2}$ . بنابراین

$$\sin 2x = 1 \Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin 2x = \frac{3}{2} \quad (\text{غ.ق.})$$

۵۸۶ ابتدا توجه کنید که

$$2 \cos^2 2x + 3 \cos 2x + 1 = 0 \Rightarrow (2 \cos 2x + 1)(\cos 2x + 1) = 0$$

بنابراین

$$\cos 2x = -1 \Rightarrow 2x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

جواب‌های واقع در بازه  $[0, 2\pi]$  عبارت‌اند از  $\frac{5\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ .

که بزرگ‌ترین جواب واقع در این بازه  $\frac{5\pi}{3}$  است.

۵۸۷ اگر فرض کنیم  $t = \tan x$ ، معادله زیر به دست می‌آید که

$$t^2 - (\sqrt{3} + 1)t + \sqrt{3} = 0$$

مجموع ضرایب آن صفر است:

بنابراین

$$t = 1 = \tan x \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}, \quad t = \sqrt{3} = \tan x \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{3}$$

بنابراین جواب‌های واقع در بازه  $(0, 2\pi)$  عبارت‌اند از  $\frac{4\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6}$ .

۵۸۸ اگر فرض کنیم  $t = \tan x$ ، آن‌گاه معادله به صورت

$$3t^2 - 4\sqrt{3}t + 3 = 0$$

درمی‌آید. از حل این معادله درجه دوم نتیجه می‌شود  $t = \sqrt{3}$  یا  $t = \frac{\sqrt{3}}{3}$ . بنابراین

$$\tan x = \sqrt{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{3} = k\pi + \frac{2\pi}{6}$$

$$\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{6}$$

بنابراین جواب‌های معادله به صورت  $x = k\pi + \frac{n\pi}{6}$  هستند که در آن  $k$  هر عدد

صحیح دلخواه و  $n$  برابر ۱ یا ۲ است.

۵۸۹ با توجه به  $\sin(\pi + x) = -\sin x$  معادله را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\sin^2 x - \sin x - 2 = 0 \Rightarrow (\sin x + 1)(\sin x - 2) = 0$$

بنابراین جواب‌های معادله به صورت زیر هستند

$$\sin x - 2 = 0 \Rightarrow \sin x = 2 \quad (\text{غ.ق.})$$

$$\sin x + 1 = 0 \Rightarrow \sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

۵۹۰ ابتدا معادله را به صورت زیر می‌نویسیم

$$2(1 - \sin^2 x) + 3 \sin x - 3 = 0 \Rightarrow 2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$$

اگر فرض کنیم  $t = \sin x$ ، معادله به صورت  $2t^2 - 3t + 1 = 0$  درمی‌آید. از حل

این معادله نتیجه می‌شود  $t = 1$  و  $t = \frac{1}{2}$ . بنابراین

$$\sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \quad \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

توجه کنید که فقط جواب‌های واقع در بازه  $(0, \pi)$  را معین کرده‌ایم که تعداد آنها سه تا است.