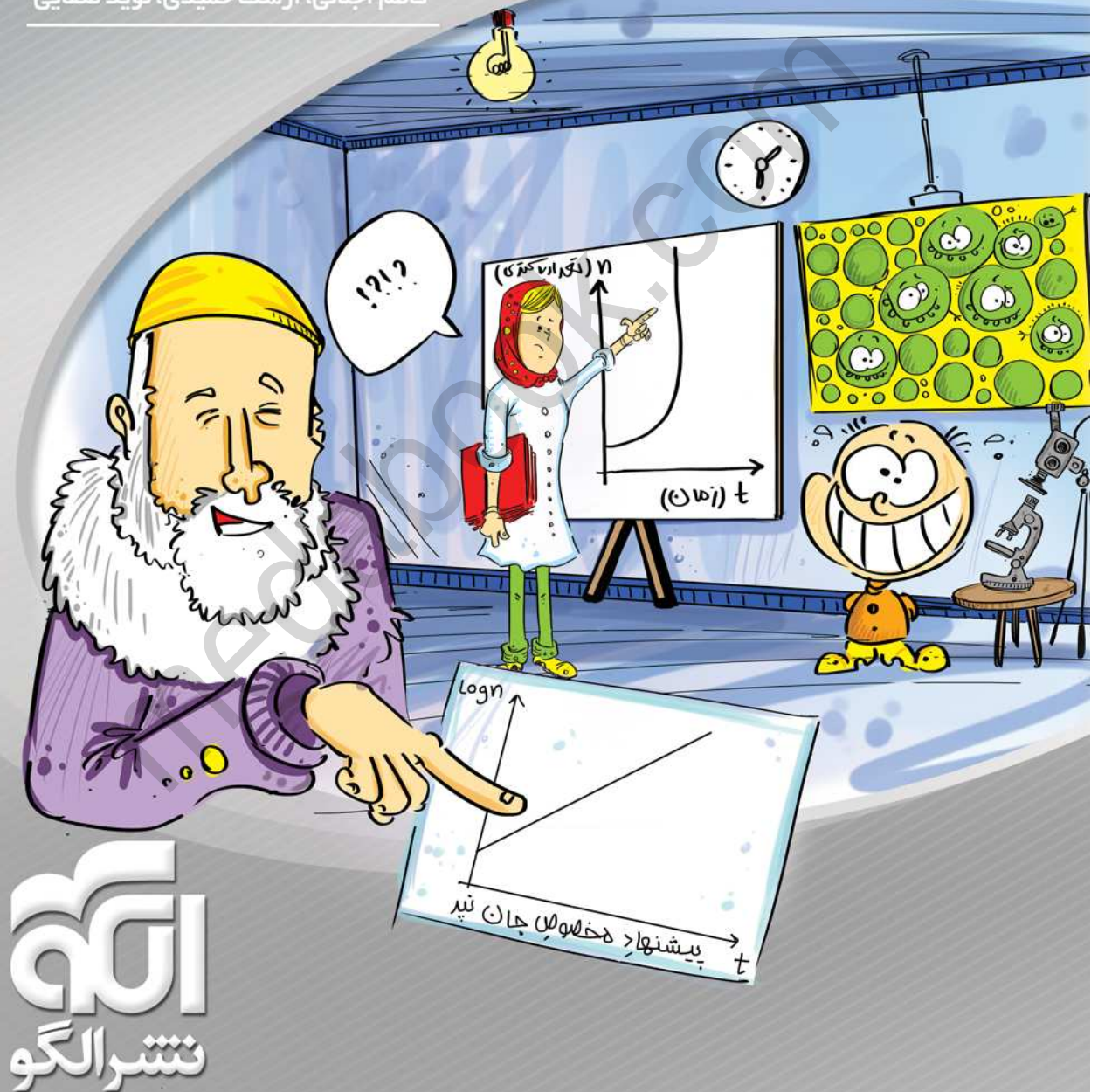


کتاب‌های
سه‌بعدی

آموزش کامل + تمرین + پرسش‌های چهارگزینه‌ای

ریاضی ۲ (یازدهم) تجربی

کاظم اجلالی، ارشک حمیدی، نوید صفایی



انتشارات
الگو

پیشگفتار

به نام خدا

این کتاب را بر اساس محتوای ریاضی ۲ تجربی پایه یازدهم و با هدف آموزش عمیق تر مفاهیم درسی نوشته ایم. بنابراین، کتاب حاضر مکمل کتاب درسی است. به همین دلیل، تقریباً همه جا چارچوب های کتاب درسی را رعایت کرده ایم، هر چند که مواردی هم هست که برای بیان دقیق تر مفاهیم و درک بهتر آن ها پا را کمی فراتر گذاشته ایم.

هر فصل کتاب به چند درس تقسیم شده است. در هر درس مفاهیم اصلی را با بیانی روشن و با آوردن مثال هایی متنوع معرفی کرده ایم و با حل کردن مسئله ها و تست هایی که به دقت انتخاب شده اند، روش های استفاده از آن ها را در حل مسئله، آموزش داده ایم. آموختن ریاضیات بدون تمرین و تکرار، نشدنی است. بنابراین، در انتهای هر درس در دو بخش «تمرین» و «پرسش های چهارگزینه ای» تعداد زیادی مسئله و تست آورده ایم.

راه حل همه تمرین ها و پرسش های چهارگزینه ای را در دو فصل پایانی آورده ایم. بهتر است پیش از حل کردن تمرین ها و پرسش های چهارگزینه ای، مسئله ها و تست های حل شده در متن درس را کامل بخوانید.

وظیفه خود می دانیم که از همکاران عزیزمان در نشر الگو، خانم ها مریم موحدی مهر، مریم بیوک زاده و عاطفه ربیعی برای مطالعه و ویرایش کتاب، لایلا پرهیزکاری برای صفحه آرایی و سرکار خانم سکینه مختار مسئول واحد ویراستاری و حروفچینی انتشارات الگو تشکر و قدردانی کنیم.

مؤلفان

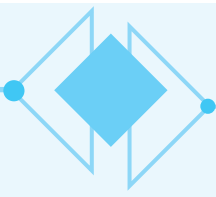
فهرست

◆ فصل اول: هندسه تحلیلی و جبر

درس اول: هندسه تحلیلی	۲
تمرین	۱۲
پرسش‌های چهارگزینه‌ای	۱۴
درس دوم: معادله درجه دوم و تابع درجه دوم	۱۷
تمرین	۲۷
پرسش‌های چهارگزینه‌ای	۳۰
درس سوم: معادلات گویا و معادلات رادیکالی	۳۵
تمرین	۳۹
پرسش‌های چهارگزینه‌ای	۴۰

◆ فصل دوم: هندسه

درس‌های اول و دوم: ترسیم‌های هندسی - استدلال و قضیه تالس	۴۴
تمرین	۵۷
پرسش‌های چهارگزینه‌ای	۶۱
درس سوم: تشابه مثلث‌ها	۶۵
تمرین	۷۴
پرسش‌های چهارگزینه‌ای	۸۰



◆ فصل سوم: تابع

- درس اول: آشنایی با برخی از انواع توابع ۸۶
- تمرین ۹۷
- پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۱۰۰
- درس دوم: وارون یک تابع و تابع یک‌به‌یک ۱۰۷
- تمرین ۱۱۳
- پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۱۱۵
- درس سوم: اعمال جبری روی توابع ۱۲۰
- تمرین ۱۲۳
- پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۱۲۴

◆ فصل چهارم: مثلثات

- درس اول: واحدهای اندازه‌گیری زاویه ۱۲۸
- تمرین ۱۳۲
- پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۱۳۴
- درس دوم: روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی ۱۳۶
- تمرین ۱۴۱
- پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۱۴۳
- درس سوم: توابع مثلثاتی ۱۴۶
- تمرین ۱۴۹
- پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۱۵۲

◆ فصل پنجم: توابع نمایی و لگاریتمی

- درس اول: تابع نمایی و ویژگی‌های آن ۱۵۶
- تمرین ۱۶۱
- پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۱۶۳
- درس‌های دوم و سوم: تابع لگاریتمی و ویژگی‌های آن - نمودارها و کاربردهای توابع نمایی و لگاریتمی ۱۶۶
- تمرین ۱۷۶
- پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۱۷۸

فصل ششم: حد و پیوستگی	
درس اول: فرایندهای حدی	۱۸۶
تمرین	۱۹۱
پرسش‌های چهارگزینه‌ای	۱۹۳
درس دوم: محاسبه حد توابع	۱۹۶
تمرین	۲۰۶
پرسش‌های چهارگزینه‌ای	۲۰۹
درس سوم: پیوستگی	۲۱۶
تمرین	۲۲۰
پرسش‌های چهارگزینه‌ای	۲۲۲

فصل هفتم: آمار و احتمال	
درس اول: احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل	۲۲۶
تمرین	۲۳۲
پرسش‌های چهارگزینه‌ای	۲۳۴
درس دوم: آمار توصیفی	۲۳۸
پرسش‌های چهارگزینه‌ای	۲۴۰

فصل هشتم: راه حل تمرین‌ها	
راه حل تمرین‌ها	۲۴۲

فصل نهم: پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای	
پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای	۳۰۲

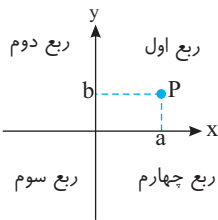
فصل اول

هندسهٔ تحلیلی و جبر

فصل اول

درس اول: هندسه تحلیلی

یادآوری

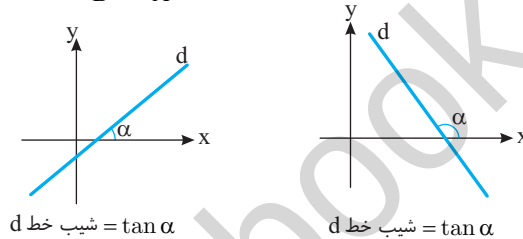


محاورهای مختصات در صفحه، دو محور با مبدأ مشترک هستند که هر یک بر دیگری عمود است. محاورهای مختصات، صفحه را به چهار ناحیه تقسیم می کنند که هر یک از آن ها را یک ربع می نامند (شکل را ببینید). نقطه های روی محاورهای مختصات در هیچ ربعی نیستند. هر نقطه در صفحه مانند P متناظر با زوج مرتبی از عددهای حقیقی مانند (a, b) است. a را طول نقطه P می نامند و معمولاً آن را با x_P نشان می دهند. b را عرض نقطه P می نامند و معمولاً آن را با y_P نشان می دهند. a و b را مختصات نقطه P می نامند و گاهی این نقطه را به شکل $P(a, b)$ می نویسند، که یعنی نقطه (a, b) است.

مطالب تکمیلی درباره معادله خط راست

از هر دو نقطه در صفحه مختصات فقط یک خط راست می گذرد. فرض کنید $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ دو نقطه در صفحه باشند

و $x_A \neq x_B$ شیب خط راستی که از نقطه های A و B می گذرد برابر است با $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.



فرض کنید خط راست l از نقطه های $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ بگذرد و $x_1 \neq x_2$. اگر $C(x, y)$ نقطه ای به جز این نقطه ها و روی این

خط باشد، چون شیب خط راستی که از A و C می گذرد با شیب خط راستی که از A و B می گذرد برابر است، پس $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. در نتیجه

$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$. چون مختصات نقطه های A و B هم در این معادله صدق می کنند. پس مختصات هر نقطه روی خط l در این معادله صدق می کند.

نتیجه

معادله خط راستی که از نقطه های (x_1, y_1) و (x_2, y_2) می گذرد (که در اینجا $x_1 \neq x_2$)، به صورت $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ است.

اگر دو طرف معادله خط راست $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ را در $x_1 - x_2$ ضرب کنیم به دست می آید

$$(x_1 - x_2)y - (x_1 - x_2)y_1 = (y_2 - y_1)x - (y_2 - y_1)x_1$$

اگر عبارت های سمت چپ را به سمت راست ببریم، معلوم می شود که معادله خط راست به صورت $ax + by + c = 0$ است.

نتیجه

معادله هر خط راست به صورت $ax + by + c = 0$ است. شیب این خط برابر با $-\frac{a}{b}$ است.

اگر شیب خط راستی را که از نقطه های (x_1, y_1) و (x_2, y_2) می گذرد $(x_1 \neq x_2)$ ، یعنی $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ را با m نشان دهیم، معلوم

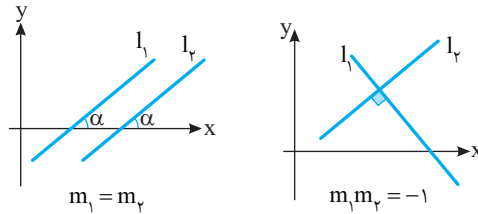
می شود که معادله خط راست را می توان به صورت $y - y_1 = m(x - x_1)$ نوشت. اگر این معادله را ساده کنیم معلوم می شود که می توان آن را به شکل $y = mx + b$ نوشت $(b = y_1 - mx_1)$. توجه کنید که نقطه $(0, b)$ محل برخورد این خط با محور y است و b را عرض از مبدأ این خط می نامند. در ضمن، اگر نقطه $(a, 0)$ محل برخورد خط با محور x باشد، a را طول از مبدأ خط می نامند.

معادله خط راستی که شیب آن برابر m و عرض از مبدأ آن برابر b است به صورت $y = mx + b$ است.

نتیجه

خطهای موازی و خطهای عمود بر هم

یادآوری الف) فرض کنید l_1 و l_2 دو خط راست غیرموازی با محور y با شیبهای m_1 و m_2 باشند. در این صورت l_1 و l_2 موازی اند اگر و فقط اگر $m_1 = m_2$.
ب) فرض کنید l_1 و l_2 دو خط راست غیرموازی با محورهای مختصات باشند. در این صورت l_1 و l_2 بر هم عمودند، اگر و فقط اگر $m_1 m_2 = -1$.



مسئله ۱ معادله خط راستی را بنویسید که از نقطه $(2, 1)$ بگذرد و بر خط $2x - 4y + 7 = 0$ عمود باشد.

راه حل شیب خط $2x - 4y + 7 = 0$ برابر است با $\frac{1}{2}$. اگر شیب خط مورد نظر m باشد، آنگاه $\frac{1}{m} = -1$ ، پس $m = -2$. معادله خط راستی که شیب آن -2 است و از نقطه $(2, 1)$ می‌گذرد به صورت $y - 1 = -2(x - 2)$ ، یعنی $y + 2x - 5 = 0$ است.

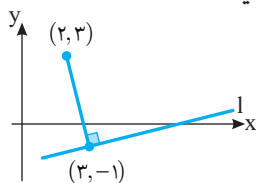
تست ۱ اگر خط راستی که از نقطه‌های $(3, a)$ و $(2, 7)$ می‌گذرد بر خط راستی که از نقطه‌های $(-1, 4)$ و $(1, 8)$ می‌گذرد عمود باشد، مقدار a چقدر است؟

راه حل شیب خط راستی که از نقطه‌های $(3, a)$ و $(2, 7)$ می‌گذرد برابر است با $\frac{a-7}{3-2} = a-7$. شیب خط راستی که از نقطه‌های $(-1, 4)$ و $(1, 8)$ می‌گذرد برابر است با $\frac{8-4}{1-(-1)} = 2$. اگر دو خط بر هم عمود باشند، حاصل ضرب شیب‌های آنها برابر -1 است، پس $(a-7)(2) = -1 \Rightarrow a = \frac{13}{2}$.

مسئله ۲ معادله خط راستی را بنویسید که از نقطه $(-3, 5)$ می‌گذرد و بر خط راستی که از نقطه‌های $(2, 5)$ و $(-3, 6)$ می‌گذرد عمود است.

راه حل شیب خط راستی که از نقطه‌های $(2, 5)$ و $(-3, 6)$ می‌گذرد برابر است با $\frac{5-6}{2+3} = -\frac{1}{5}$. اگر شیب خط مورد نظر برابر m باشد، چون بر این خط عمود است، پس $m(-\frac{1}{5}) = -1$ ، در نتیجه $m = 5$. معادله خط راستی که شیب آن 5 است و از نقطه $(-3, 5)$ می‌گذرد به صورت زیر است:
 $y - 5 = 5(x + 3) \Rightarrow y - 5x - 20 = 0$

مسئله ۳ پای عمود وارد از نقطه $(2, 3)$ بر خط راست l نقطه $(3, -1)$ است. معادله این خط راست را بنویسید.



راه حل خط مورد نظر بر خط راستی که از نقطه‌های $(2, 3)$ و $(3, -1)$ می‌گذرد عمود است (شکل را ببینید). شیب خط راستی که از نقطه‌های $(2, 3)$ و $(3, -1)$ می‌گذرد برابر است با $\frac{-1-3}{3-2} = -4$. اگر شیب m خط مورد نظر باشد، آنگاه $m(-4) = -1$ ، پس $m = \frac{1}{4}$. شیب خط مورد نظر $\frac{1}{4}$ است و از نقطه $(3, -1)$ می‌گذرد، بنابراین معادله آن به صورت زیر است:
 $y + 1 = \frac{1}{4}(x - 3) \Rightarrow x - 4y - 7 = 0$

تست

۲

پای عمود وارد از نقطه $(3, 4)$ بر خط $2x + y - 7 = 0$ کدام نقطه است؟(۱) $(\frac{9}{5}, \frac{17}{5})$ (۲) $(1, 5)$ (۳) $(1, -5)$ (۴) $(-5, 1)$

را حل

شیب خط $2x + y - 7 = 0$ برابر است با $-\frac{2}{1} = -2$. بنابراین اگر شیب خط مورد نظر برابر m باشد، آن گاه $m(-2) = -1$ ، یعنی $m = \frac{1}{2}$. معادله خط راستی که شیب آن $\frac{1}{2}$ است و از نقطه $(3, 4)$ می‌گذرد به صورت زیر است:

$$y - 4 = \frac{1}{2}(x - 3) \Rightarrow x - 2y + 5 = 0$$

پای عمود مورد نظر محل برخورد خط‌های $2x + y - 7 = 0$ و $x - 2y + 5 = 0$ است. اگر دستگاه معادله‌های

$$\begin{cases} 2x + y - 7 = 0 \\ x - 2y + 5 = 0 \end{cases}$$

را حل کنیم به دست می‌آید $x = \frac{9}{5}$ و $y = \frac{17}{5}$. بنابراین نقطه مورد نظر $(\frac{9}{5}, \frac{17}{5})$ است.

مسئله ۴

ثابت کنید نقطه‌های $A(3, 4)$ ، $B(-2, -1)$ و $C(4, 1)$ رأس‌های مثلثی قائم‌الزاویه هستند.

را حل

شیب خط‌های راستی که ضلع‌های مثلث ABC روی آن‌ها قرار دارند برابر است با $m_{AB} = \frac{4+1}{3+2} = 1$ و $m_{BC} = \frac{-1-1}{-2-4} = \frac{1}{3}$ چون $m_{AC} = \frac{4-1}{3-4} = -3$ ، پس ضلع‌های BC و AC بر هم عمودند و مثلث ABC قائم‌الزاویه است.

مسئله ۵

نقطه‌های $A(10, 4)$ ، $B(-4, 9)$ و $C(-2, -1)$ رأس‌های مثلث ABC هستند. معادله خط راستی را که ارتفاع وارد از رأس A روی آن قرار دارد بنویسید.

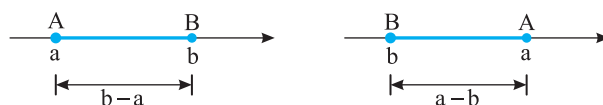
را حل

ارتفاع وارد از رأس A بر ضلع BC عمود است. شیب خط راستی که از نقطه‌های B و C می‌گذرد برابر است با $-\frac{9+1}{-4+2} = -5$. بنابرایناگر شیب خط راستی که ارتفاع روی آن قرار دارد برابر m باشد، آن گاه $m(-5) = -1$ ، پس $m = \frac{1}{5}$. معادله خط راستی که شیب آن $\frac{1}{5}$ است و از نقطه $A(10, 4)$ می‌گذرد به صورت زیر است:

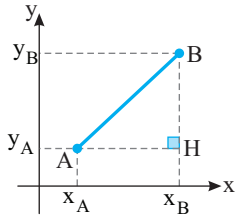
$$y - 4 = \frac{1}{5}(x - 10) \Rightarrow x - 5y + 10 = 0$$

فاصله بین دو نقطه

فرض کنید A و B دو نقطه روی محور باشند. در این صورت، **فاصله** بین A و B برابر با طول پاره‌خط AB است. اگر نقطه‌های A و B متناظر با عددهای a و b باشند، از روی شکل‌های زیر معلوم است که طول پاره‌خط AB (بر حسب اینکه $a > b$ یا $a < b$) برابر با $a - b$ یا $b - a$ است که با نمادگذاری قدرمطلق می‌شود $|a - b|$.

اگر a و b را با x_A و x_B نشان دهیم، نتیجه زیر به دست می‌آید:اگر نقطه‌های A و B روی محور متناظر با عددهای x_A و x_B باشند، فاصله بین A و B برابر با $|x_A - x_B|$ است.

نتیجه



اکنون فرض کنید $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ دو نقطه در صفحه مختصات باشند. از روی شکل روبه‌رو معلوم است که $AH = |x_A - x_B|$ و $BH = |y_A - y_B|$. در نتیجه، بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث AHB ، $AB^2 = AH^2 + BH^2 = |x_A - x_B|^2 + |y_A - y_B|^2$. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$. منظورمان از **فاصله** دو نقطه A و B طول پاره‌خط AB است. بنابراین نتیجه زیر به دست می‌آید.

نتیجه فاصله دو نقطه $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ در صفحه مختصات برابر است با $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$.

مثال: فاصله نقطه‌های $(1, -2)$ و $(-2, 2)$ در صفحه مختصات برابر است با $\sqrt{(1 - (-2))^2 + (-2 - 2)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$.

تست ۳ فاصله نقطه $A(a, 1)$ از نقطه‌های $B(-1, 1)$ و $C(3, 5)$ برابر است. مقدار a چقدر است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

توجه کنید که

$$AB = AC \Rightarrow \sqrt{(a+1)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{(a-3)^2 + (1-5)^2} \Rightarrow \sqrt{a^2 + 2a + 1} = \sqrt{a^2 - 6a + 16}$$

اگر دو طرف این تساوی را به توان دو برسانیم به دست می‌آید

$$a^2 + 2a + 1 = a^2 - 6a + 16 \Rightarrow 8a = 15 \Rightarrow a = \frac{15}{8}$$

مسئله ۶ نقطه‌ای روی محور x پیدا کنید که فاصله‌اش از نقطه‌های $(1, 3)$ و $(2, -5)$ برابر باشد.

فرض کنید نقطه مورد نظر $(a, 0)$ باشد. در این صورت فاصله‌اش تا نقطه $(1, 3)$ برابر است با

$$\sqrt{(a-1)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{(a-1)^2 + 9} = \sqrt{a^2 - 2a + 10}$$

و فاصله‌اش از نقطه $(2, -5)$ برابر است با $\sqrt{(a-2)^2 + (-5)^2} = \sqrt{(a-2)^2 + 25} = \sqrt{a^2 - 4a + 29}$

در نتیجه باید $\sqrt{a^2 - 2a + 10} = \sqrt{a^2 - 4a + 29}$. اگر دو طرف این تساوی را به توان دو برسانیم، نتیجه می‌شود

$$a^2 - 2a + 10 = a^2 - 4a + 29 \Rightarrow 2a = 19 \Rightarrow a = \frac{19}{2}$$

مسئله ۷ ثابت کنید مثلثی که رأس‌هایش نقطه‌های $A(0, 6)$ ، $B(-5, 3)$ و $C(3, 1)$ هستند، متساوی‌الساقین است.

توجه کنید که $AB = \sqrt{(0+5)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$ و $AC = \sqrt{(0-3)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$ بنابراین $AB = AC$ و مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

تست ۴ نقطه‌های $B(1, 3)$ و $C(-2, 7)$ دو سر قاعده مثلث متساوی‌الساقین ABC هستند. رأس A کدام نقطه می‌تواند باشد؟

۱ (۱, ۶) ۲ $(-\frac{1}{3}, 5)$ ۳ $(\frac{5}{6}, 6)$ ۴ $(\frac{1}{6}, 7)$

فرض کنید $A(a, b)$ باشد. در این صورت

$$AB = AC \Rightarrow \sqrt{(a-1)^2 + (b-3)^2} = \sqrt{(a+2)^2 + (b-7)^2} \Rightarrow (a-1)^2 + (b-3)^2 = (a+2)^2 + (b-7)^2$$

$$a^2 - 2a + 1 + b^2 - 6b + 9 = a^2 + 4a + 4 + b^2 - 14b + 49 \Rightarrow -6a + 8b = 43$$

مختصات نقطه $(\frac{5}{6}, 6)$ در این تساوی صدق می‌کند و مختصات بقیه نقطه‌ها صدق نمی‌کنند. بنابراین A می‌تواند نقطه $(\frac{5}{6}, 6)$ باشد.

مسئله ۸

نقطه‌های $A(0, 0)$ ، $B(3, 0)$ و $C(a, b)$ رأس‌های مثلثی متساوی‌الاضلاع هستند. a و b را پیدا کنید.

راه‌حل

توجه کنید که $AB = \sqrt{(0-3)^2 + (0-0)^2} = 3$. بنابراین

$$AC = 3 \Rightarrow \sqrt{(0-a)^2 + (0-b)^2} = 3 \Rightarrow a^2 + b^2 = 9 \quad (1)$$

$$BC = 3 \Rightarrow \sqrt{(3-a)^2 + (0-b)^2} = 3 \Rightarrow (3-a)^2 + b^2 = 9 \Rightarrow 9 - 6a + a^2 + b^2 = 9 \quad (2)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $9 - 6a = 0$ ، پس $a = \frac{3}{2}$. در نتیجه از تساوی (۱) به دست می‌آید $b^2 = 9 - a^2 = 9 - \frac{9}{4} = \frac{27}{4}$.

$$b = \pm \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \text{بنابراین}$$

مسئله ۹

نقطه‌ای پیدا کنید که فاصله‌اش از نقطه‌های $(-1, 0)$ و $(2, 4)$ به ترتیب برابر با ۱ و ۴ باشد.

راه‌حل

نقطه مورد نظر را (x, y) می‌نامیم. در این صورت

$$\begin{cases} \sqrt{(x+1)^2 + (y-0)^2} = 1 \\ \sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2} = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+1)^2 + y^2 = 1 \\ (x-2)^2 + (y-4)^2 = 16 \end{cases}$$

اگر این تساوی‌ها را ساده کنیم به دست می‌آید

$$x^2 + 2x + y^2 = 0 \quad (1), \quad x^2 - 4x + 4 + y^2 - 8y = 0 \quad (2)$$

اگر تساوی (۱) را از تساوی (۲) کم کنیم، به دست می‌آید $y = \frac{-3x+2}{4}$. اگر این مقدار y را در تساوی (۱) قرار دهیم و ساده کنیم به دست

می‌آید $25x^2 + 20x + 4 = 0$ در نتیجه $(5x+2)^2 = 0$. بنابراین $x = -\frac{2}{5}$ و در نتیجه $y = \frac{-3x+2}{4} = \frac{4}{5}$. بنابراین نقطه مورد نظر

$$\left(-\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right) \text{ است.}$$

مسئله ۱۰

نقطه P را طوری پیدا کنید که از نقطه‌های $A(1, 3)$ ، $B(-3, 5)$ و $C(5, -1)$ به یک فاصله باشد.

راه‌حل

فرض کنید P نقطه (a, b) باشد. در این صورت

$$PA = PB \Rightarrow \sqrt{(a-1)^2 + (b-3)^2} = \sqrt{(a+3)^2 + (b-5)^2} \Rightarrow (a-1)^2 + (b-3)^2 = (a+3)^2 + (b-5)^2$$

$$a^2 - 2a + 1 + b^2 - 6b + 9 = a^2 + 6a + 9 + b^2 - 10b + 25 \Rightarrow -2a + b = 6 \quad (1)$$

$$PA = PC \Rightarrow \sqrt{(a-1)^2 + (b-3)^2} = \sqrt{(a-5)^2 + (b+1)^2} \Rightarrow (a-1)^2 + (b-3)^2 = (a-5)^2 + (b+1)^2$$

$$a^2 - 2a + 1 + b^2 - 6b + 9 = a^2 - 10a + 25 + b^2 + 2b + 1 \Rightarrow a - b = 2 \quad (2)$$

اگر دستگاه معادله‌های (۱) و (۲) را حل کنیم به دست می‌آید $a = -8$ و $b = -10$. بنابراین P نقطه $(-8, -10)$ است.

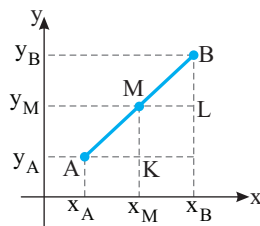
مختصات نقطه وسط پاره‌خط

فرض کنید A و B دو نقطه روی محور باشند و نقطه M وسط پاره‌خط AB باشد (شکل روبه‌رو

را ببینید). در این صورت



$$AM = BM \Rightarrow x_M - x_A = x_B - x_M \Rightarrow x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$



اکنون فرض کنید $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ دو نقطه در صفحه مختصات باشند و نقطه $M(x_M, y_M)$ وسط پاره خط AB باشد (شکل روبه‌رو را ببینید). در این صورت از همنهشتی مثلث‌های AMK و MBL نتیجه می‌شود

$$AK = ML \Rightarrow x_M - x_A = x_B - x_M \Rightarrow x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

به همین ترتیب معلوم می‌شود که $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$

فرض کنید $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ دو نقطه در صفحه باشند و نقطه M وسط پاره خط AB باشد. در این صورت،

$$مختصات نقطه M برابرند با $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$ و $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$$

نتیجه

مثال: مختصات نقطه M وسط پاره خط میان نقطه‌های $A(-1, 4)$ و $B(3, 6)$ برابرند با

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-1 + 3}{2} = 1$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{4 + 6}{2} = 5$$

مثال: مختصات نقطه M وسط پاره خط میان نقطه‌های $A(a-1, 3-2b)$ و $B(3-a, 2b+5)$ برابرند با

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{a-1 + 3-a}{2} = 1$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3-2b + 2b+5}{2} = 4$$

نقطه‌های $A(10, 4)$ ، $B(-4, 9)$ و $C(-2, -1)$ رأس‌های مثلث ABC هستند. طول میانه‌ای را که از رأس A می‌گذرد حساب کنید.

مسئله ۱۱

نقطه M وسط ضلع BC ، به صورت $(\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2}) = (\frac{-4-2}{2}, \frac{9-1}{2}) = (-3, 4)$ به دست می‌آید. بنابراین

راه حل

$$AM = \sqrt{(10+3)^2 + (4-4)^2} = \sqrt{13^2} = 13$$

اگر نقطه $(1, 1)$ رأسی از یک مثلث باشد و $(-2, 3)$ و $(5, 2)$ نقطه‌های وسط ضلع‌هایی که از این رأس می‌گذرند باشند، مختصات دو رأس دیگر را پیدا کنید.

مسئله ۱۲

فرض کنید نقطه $(1, 1)$ رأس A ، نقطه $(-2, 3)$ وسط ضلع AB و نقطه $(5, 2)$ وسط ضلع AC باشند. توجه کنید که

راه حل

$$AB \text{ ضلع} = (\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}) = (\frac{1+x_B}{2}, \frac{1+y_B}{2})$$

پس $3 = \frac{1+y_B}{2}$ در نتیجه $y_B = 5$ و $-2 = \frac{1+x_B}{2}$ بنابراین $x_B = -5$. بنابراین مختصات رأس B نقطه $(-5, 5)$ است. به همین

ترتیب، $AC \text{ ضلع} = (\frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_A + y_C}{2}) = (\frac{1+x_C}{2}, \frac{1+y_C}{2})$ ، پس

$$5 = \frac{1+x_C}{2} \Rightarrow x_C = 9, \quad 2 = \frac{1+y_C}{2} \Rightarrow y_C = 3$$

بنابراین مختصات رأس C نقطه $(9, 3)$ است.

تست

□□□□

وسط پاره‌خطی که دو سر آن نقطه‌های برخورد خط راست l با محورهای مختصات هستند، نقطه $(5, 2)$ است. معادله خط l کدام است؟

$$(1) \quad 5x + 2y = 29 \quad (2) \quad 2x + 5y = 20 \quad (3) \quad 3x - 2y = 11 \quad (4) \quad 2x + 3y = 16$$

راهنما

فرض کنید خط l محورهای مختصات را در نقطه‌های $(a, 0)$ و $(0, b)$ قطع می‌کند. در این صورت وسط پاره‌خطی که دو سرش این دو

نقطه هستند، نقطه $(\frac{a+0}{2}, \frac{0+b}{2})$ یعنی $(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$ است. بنابراین

$$(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}) = (5, 2) \Rightarrow \frac{a}{2} = 5, \quad \frac{b}{2} = 2 \Rightarrow a = 10, \quad b = 4$$

معادله خط راستی که از نقطه‌های $(10, 0)$ و $(0, 4)$ می‌گذرد، به صورت زیر است:

$$y - 0 = \frac{0-4}{10-0}(x-10) \Rightarrow y = -\frac{2}{5}(x-10) \Rightarrow 5y + 2x = 20$$

مسئله ۱۳

راهنما

معادله عمودمنصف پاره‌خط میان نقطه‌های $(3, 4)$ و $(-1, 2)$ را بنویسید.

وسط پاره‌خط مورد نظر نقطه $(\frac{3-1}{2}, \frac{4+2}{2})$ ، یعنی $(1, 3)$ است. شیب خط راستی که از نقطه‌های $(3, 4)$ و $(-1, 2)$ می‌گذرد برابر

است با $\frac{4-2}{3+1} = \frac{1}{2}$. بنابراین اگر شیب عمودمنصف مورد نظر برابر m باشد، آن‌گاه $m \times \frac{1}{2} = -1$ ، پس $m = -2$. معادله خط راستی که

شیب آن -2 است و از نقطه $(1, 3)$ می‌گذرد به صورت زیر است:

$$y - 3 = -2(x - 1) \Rightarrow 2x + y - 5 = 0$$

فرض کنید نقطه‌های $A(x_A, y_A)$ ، $B(x_B, y_B)$ ، $C(x_C, y_C)$ و $D(x_D, y_D)$ رأس‌های

متوازی‌الاضلاع $ABCD$ و نقطه $M(x_M, y_M)$ محل برخورد قطرهای این متوازی‌الاضلاع باشند.

چون در متوازی‌الاضلاع قطرهای یکدیگر را نصف می‌کنند، پس نقطه M هم وسط پاره‌خط AC است و

$$\text{هم وسط پاره‌خط } BD. \text{ در نتیجه } x_M = \frac{x_B + x_D}{2} \text{ و } x_M = \frac{x_A + x_C}{2}$$

$$\text{بنابراین } x_A + x_C = x_B + x_D. \text{ به همین ترتیب } y_M = \frac{y_B + y_D}{2} \text{ و } y_M = \frac{y_A + y_C}{2}$$

$$\text{بنابراین } y_A + y_C = y_B + y_D$$

اگر $A(x_A, y_A)$ ، $B(x_B, y_B)$ ، $C(x_C, y_C)$ و $D(x_D, y_D)$ رأس‌های متوازی‌الاضلاع $ABCD$ باشند، آن‌گاه

$$x_A + x_C = x_B + x_D, \quad y_A + y_C = y_B + y_D$$

نتیجه

تست

□□□□

اگر نقطه‌های $A(2, -2)$ ، $B(8, 4)$ ، $C(5, 7)$ و $D(a, b)$ رأس‌های متوازی‌الاضلاع $ABCD$ باشند، نقطه D کدام است؟

$$(1) \quad (1, 1) \quad (2) \quad (1, -1) \quad (3) \quad (-1, 1) \quad (4) \quad (-1, -1)$$

راهنما

توجه کنید که

$$x_A + x_C = x_B + x_D \Rightarrow 2 + 5 = 8 + a \Rightarrow a = -1$$

همین‌طور

$$y_A + y_C = y_B + y_D \Rightarrow -2 + 7 = 4 + b \Rightarrow b = 1$$

بنابراین D نقطه $(-1, 1)$ است.

تست

۷

نقطه‌های $A(2, a)$ ، $B(1, 4)$ ، $C(b, 3)$ و $D(3, 2)$ رأس‌های متوازی‌الاضلاع ABCD هستند. مقدار $a - b$ چقدر است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

راه‌حل

توجه کنید که

$$x_A + x_C = x_B + x_D \Rightarrow 2 + b = 1 + 3 \Rightarrow b = 2$$

همین‌طور

$$y_A + y_C = y_B + y_D \Rightarrow a + 3 = 4 + 2 \Rightarrow a = 3$$

بنابراین $a - b = 1$.

مسئله ۱۴

راه‌حل

ثابت کنید نقطه‌های $(-1, -6)$ ، $(2, -5)$ ، $(7, 2)$ و $(4, 1)$ رأس‌های یک متوازی‌الاضلاع هستند.

اگر قطرهای یک چهارضلعی یکدیگر را نصف کنند، این چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است. وسط پاره‌خط میان نقطه‌های $(-1, -6)$ و نقطه

$(7, 2)$ نقطه $(3, -2)$ است. $(\frac{-1+7}{2}, \frac{-6+2}{2}) = (3, -2)$ وسط پاره‌خط میان نقطه‌های $(2, -5)$ و $(4, 1)$ نقطه $(3, -2)$ است. $(\frac{2+4}{2}, \frac{-5+1}{2}) = (3, -2)$

است. چون دو نقطه به‌دست آمده یکی هستند، نتیجه می‌گیریم چهار نقطه داده شده رأس‌های یک متوازی‌الاضلاع هستند.

فاصله نقطه از خط راست

یادآوری

فاصله نقطه (x_0, y_0) از خط $ax + by + c = 0$ برابر است با $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

مثال: فاصله نقطه $(1, -4)$ از خط $3x - 4y + 6 = 0$ برابر است با $\frac{|3 \times 1 - 4(-4) + 6|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{25}{5} = 5$.

مثال: برای اینکه فاصله نقطه $(2, 3)$ از خط $y = 2x - 6$ را پیدا کنیم، ابتدا خط را به صورت $2x - y - 6 = 0$ می‌نویسیم، سپس

از دستور فاصله نقطه از خط استفاده می‌کنیم. در این صورت به‌دست می‌آید $\frac{|2 \times 2 - 3 - 6|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|-5|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$.

مسئله ۱۵

راه‌حل

فاصله نقطه $(1, 1)$ از خط $12(x+4) = 5(y-2)$ چقدر است؟

ابتدا معادله خط را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$12(x+4) = 5(y-2) \Rightarrow 12x + 48 = 5y - 10 \Rightarrow 12x - 5y + 58 = 0$$

بنابراین فاصله نقطه $(1, 1)$ از این خط برابر است با $\frac{|12 \times 1 - 5 \times 1 + 58|}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}} = \frac{65}{13} = 5$.

تست

۸

طول عمود وارد از نقطه $(3, 1)$ بر خط $4x + 3y + 20 = 0$ چقدر است؟

۱ (۱) ۵ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴)

راه‌حل

طول عمود وارد از نقطه $(3, 1)$ بر خط $4x + 3y + 20 = 0$ در حقیقت فاصله این نقطه از این خط است که برابر است با

$$\frac{|4 \times 3 + 3 \times 1 + 20|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{35}{5} = 7$$

مسئله ۱۶

فاصله نقطه $(4, 1)$ از خط $2x - 3y + c = 0$ برابر $\sqrt{13}$ است. مقدار c را پیدا کنید.

راه حل

فاصله نقطه $(4, 1)$ از خط $2x - 3y + c = 0$ برابر است با

$$\frac{|2 \times 4 - 3 \times 1 + c|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \sqrt{13} \Rightarrow \frac{|c+5|}{\sqrt{13}} = \sqrt{13} \Rightarrow |c+5| = 13 \Rightarrow c+5 = \pm 13 \Rightarrow c = 8, c = -18$$

مسئله ۱۷

معادله خط‌های راستی را بنویسید که شیب آن‌ها برابر -1 و فاصله مبدأ از آن‌ها برابر 5 است.

راه حل

فرض کنید خط $ax + by + c = 0$ ویژگی‌های مورد نظر را داشته باشد، چون شیب این خط -1 است، پس $-\frac{a}{b} = -1$ ، در نتیجه $a = b$.

از طرف دیگر، چون فاصله مبدأ از این خط برابر 5 است، پس

$$\frac{|a \times 0 + a \times 0 + c|}{\sqrt{a^2 + a^2}} = 5 \Rightarrow \frac{|c|}{\sqrt{2}|a|} = 5 \Rightarrow |c| = 5\sqrt{2}|a| \Rightarrow c = \pm 5\sqrt{2}a$$

بنابراین خط‌های مورد نظر $ax + ay + 5\sqrt{2}a = 0$ و $ax + ay - 5\sqrt{2}a = 0$ هستند که می‌توان آن‌ها را به صورت $x + y + 5\sqrt{2} = 0$ و $x + y - 5\sqrt{2} = 0$ نوشت.

مسئله ۱۸

نقطه‌های روی خط $y = x$ را که فاصله آن‌ها از خط $4x + 3y - 1 = 0$ برابر 5 است پیدا کنید.

راه حل

هر نقطه روی خط $y = x$ به صورت (a, a) است. اگر فاصله این نقطه تا خط $4x + 3y - 1 = 0$ برابر 5 باشد، آن‌گاه

$$\frac{|4a + 3a - 1|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 5 \Rightarrow \frac{|7a - 1|}{5} = 5 \Rightarrow |7a - 1| = 25 \Rightarrow 7a - 1 = \pm 25 \Rightarrow a = -\frac{24}{7}, a = \frac{26}{7}$$

بنابراین نقطه‌های مورد نظر $(-\frac{24}{7}, -\frac{24}{7})$ و $(\frac{26}{7}, \frac{26}{7})$ هستند.

مسئله ۱۹

معادله خط‌های راستی را بنویسید که از نقطه $(-2, 3)$ می‌گذرند و فاصله نقطه‌های $(5, -1)$ و $(3, 7)$ از آن‌ها برابر است.

راه حل

معادله خط راستی که از نقطه $(-2, 3)$ می‌گذرد به صورت $y - 3 = m(x + 2)$ یعنی $mx - y + 2m + 3 = 0$ است. فاصله نقطه

$(5, -1)$ از این خط برابر است با $\frac{|m \times 5 - (-1) + 2m + 3|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \frac{|7m + 4|}{\sqrt{m^2 + 1}}$. فاصله نقطه $(3, 7)$ از خط مورد نظر برابر است با

$$\frac{|m \times 3 - 7 + 2m + 3|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \frac{|5m - 4|}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

اگر این دو فاصله برابر باشند، آن‌گاه

$$|7m + 4| = |5m - 4| \Rightarrow 7m + 4 = \pm(5m - 4) \Rightarrow m = 0, m = -4$$

بنابراین خط‌های مورد نظر $y - 3 = 0$ و $y - 3 = -4(x + 2)$ یعنی $4x + y + 5 = 0$ هستند.

مسئله ۲۰

مساحت مثلثی که رأس‌هایش نقطه‌های $(2, 3)$ ، $(4, -1)$ و $(1, 2)$ هستند چقدر است؟

راه حل

معادله خط راستی که رأس‌های $(2, 3)$ و $(1, 2)$ روی آن قرار دارند به صورت زیر است:

$$y - 3 = \frac{3-2}{2-1}(x-2) \Rightarrow x - y + 1 = 0$$

فاصله رأس $(4, -1)$ تا این خط که برابر طول ارتفاع وارد از این رأس است، برابر است با $\frac{|4 - (-1) + 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{2}}$. فاصله رأس‌های $(2, 3)$

و $(1, 2)$ هم برابر است با $\sqrt{(2-1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{2}$. بنابراین مساحت مثلث برابر است با $\frac{1}{2} \times \frac{6}{\sqrt{2}} \times \sqrt{2} = 3$.

تست ۹

قرینه نقطه $(3, 8)$ نسبت به خط $x + 3y - 7 = 0$ کدام نقطه است؟

- (۱) $(-1, -4)$ (۲) $(-3, -8)$ (۳) $(1, -4)$ (۴) $(3, 8)$

راه حل

فرض کنید A نقطه $(3, 8)$ باشد و نقطه $A'(a, b)$ قرینه A نسبت به خط $x + 3y - 7 = 0$ باشد. وسط پاره خط AA' نقطه

$(\frac{3+a}{2}, \frac{8+b}{2})$ است که چون روی خط $x + 3y - 7 = 0$ قرار دارد، پس

$$\frac{3+a}{2} + 3\frac{8+b}{2} - 7 = 0 \Rightarrow a + 3b = -13 \quad (1)$$

از طرف دیگر، خط $x + 3y - 7 = 0$ بر خط راستی که از A و A' می‌گذرد عمود است، در نتیجه حاصل ضرب شیب‌های آن‌ها برابر -1 است. بنابراین

$$\frac{8-b}{3-a} \times (-\frac{1}{3}) = -1 \Rightarrow 8-b = 3(3-a) \Rightarrow 3a-b=1 \quad (2)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) به دست می‌آید $a = -1$ و $b = -4$. بنابراین A' نقطه $(-1, -4)$ است.

فرض کنید l_1 و l_2 دو خط موازی با معادله‌های $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ باشند. فاصله دو خط موازی همه جا یکسان است، پس فاصله این دو خط برابر با فاصله نقطه‌ای مانند (x_0, y_0) روی خط l_1 تا خط l_2 است. پس می‌توان نتیجه گرفت که فاصله

l_1 و l_2 برابر است با $\frac{|ax_0 + by_0 + c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. از طرف دیگر، چون (x_0, y_0) نقطه‌ای روی خط $ax + by + c = 0$ است، پس مختصات

آن در این معادله صدق می‌کند. بنابراین $ax_0 + by_0 + c = 0$ ، یعنی $ax_0 + by_0 = -c$. به این ترتیب،

$$l_1 \text{ و } l_2 \text{ فاصله} = \frac{|ax_0 + by_0 + c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-c + c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

فاصله خط‌های موازی $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ برابر است با $\frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

نتیجه

فاصله خط‌های $3x + 4y = 9$ و $6x + 8y = 15$ چقدر است؟

راه حل

ابتدا دو طرف معادله خط $3x + 4y = 9$ را در ۲ ضرب می‌کنیم تا به صورت $6x + 8y = 18$ دربیایم. اکنون معادله خط‌ها را به صورت

$6x + 8y - 18 = 0$ و $6x + 8y - 15 = 0$ می‌نویسیم. در این صورت، فاصله خط‌ها برابر است با

$$\frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-18 - (-15)|}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = \frac{|-3|}{\sqrt{100}} = \frac{3}{10}$$

مسئله ۲۱

دو ضلع مربعی روی خط‌های $5x - 12y - 65 = 0$ و $5x - 12y + 26 = 0$ هستند. مساحت این مربع چقدر است؟

راه حل

طول ضلع مربع مورد نظر فاصله خط‌های $5x - 12y - 65 = 0$ و $5x - 12y + 26 = 0$ است. فاصله این دو خط برابر است با

$$\frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-65 - 26|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{91}{13} = 7$$

بنابراین مساحت مربع برابر است با $7^2 = 49$.

مسئله ۲۲

معادله خط راستی را بنویسید که با خط‌های $9x + 6y - 7 = 0$ و $3x + 2y + 4 = 0$ موازی است و فاصله‌اش از این خط‌ها برابر است.

راه حل

ابتدا خط‌های داده شده را به صورت $d_1: 9x + 6y - 7 = 0$ و $d_2: 9x + 6y + 12 = 0$ می‌نویسیم. فرض کنید معادله خط مورد نظر

به صورت $9x + 6y + c = 0$ باشد. چون فاصله این خط از d_1 و d_2 برابر است، پس

$$\frac{|c - (-7)|}{\sqrt{9^2 + 6^2}} = \frac{|c - 12|}{\sqrt{9^2 + 6^2}} \Rightarrow |c + 7| = |c - 12| \Rightarrow c + 7 = \pm(c - 12) \Rightarrow c = \frac{5}{2}$$

بنابراین معادله خط مورد نظر $9x + 6y + \frac{5}{2} = 0$ یا $18x + 12y + 5 = 0$ است.

مسئله ۲۴

راه حل

معادله خط‌های راستی را بنویسید که با خط $4x - 3y - 15 = 0$ موازی هستند و فاصله آن‌ها از این خط برابر ۳ است.

چون خط مورد نظر با خط $4x - 3y - 15 = 0$ موازی است، معادله آن به صورت $4x - 3y + c = 0$ است. چون فاصله این خط‌ها برابر ۳ است، پس

$$\frac{|c - (-15)|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 3 \Rightarrow \frac{|c + 15|}{5} = 3 \Rightarrow |c + 15| = 15 \Rightarrow c + 15 = \pm 15 \Rightarrow c = 0, \quad c = -30$$

بنابراین خط‌های مورد نظر $4x - 3y = 0$ و $4x - 3y - 30 = 0$ هستند.

تمرین

- ۱- نقطه‌ای روی محور x پیدا کنید که فاصله‌اش از نقطه‌های $(7, 6)$ و $(-3, 4)$ برابر باشد.
- ۲- نقطه‌ای روی محور y پیدا کنید که فاصله‌اش از نقطه‌های $(-5, -2)$ و $(3, 2)$ برابر باشد.
- ۳- نقطه $(\frac{1}{4}, -\frac{3}{4})$ پاره‌خط میان نقطه‌های $(3, -5)$ و $(-7, 9)$ را به چه نسبتی تقسیم می‌کند؟
- ۴- محیط مثلثی که رأس‌هایش نقطه‌های $(0, 0)$ ، $(4, 3)$ و $(0, 3)$ هستند، چقدر است؟
- ۵- نوع مثلثی را که رأس‌هایش نقطه‌های $(\sqrt{3}, 1)$ ، $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ و $(1, \sqrt{3})$ هستند، مشخص کنید.
- ۶- ثابت کنید مثلثی که رأس‌هایش نقطه‌های $(15, 5)$ ، $(5, 5)$ و $(10, 15)$ هستند، متساوی‌الساقین است.
- ۷- مقدارهای a را طوری پیدا کنید که فاصله نقطه‌های $(a, 2)$ و $(3, 8)$ برابر ۸ باشد.
- ۸- مقدارهای a را طوری تعیین کنید که اگر A ، B و C به ترتیب نقطه‌های $(6, -1)$ ، $(1, 3)$ و $(a, 8)$ باشند، طول پاره‌خط‌های AB و BC برابر باشد.
- ۹- روی خط $x - 2y - 4 = 0$ نقطه‌ای را پیدا کنید که فاصله‌اش از نقطه‌های $(5, -1)$ و $(2, -4)$ برابر باشد.
- ۱۰- ثابت کنید نقطه‌های $A(a, a)$ ، $B(-a, -a)$ و $C(-a\sqrt{3}, a\sqrt{3})$ رأس‌های مثلثی متساوی‌الاضلاع هستند.
- ۱۱- نقطه‌های $A(3, 3)$ و $B(-1, 1)$ دو رأس مثلث متساوی‌الاضلاع ABC هستند. رأس C را معین کنید.
- ۱۲- مرکز دایره‌ای نقطه $(-2, 5)$ است. مختصات سر دیگر قطری را که از نقطه $(2, 3)$ روی این دایره می‌گذرد پیدا کنید.
- ۱۳- نقطه C وسط پاره‌خط AB است. اگر وسط پاره‌خط میان نقطه‌های C و $(4, 3)$ نقطه $(1, 1)$ باشد و A نقطه $(3, -1)$ باشد، مختصات نقطه B را پیدا کنید.
- ۱۴- در مثلث ABC که رأس‌هایش نقطه‌های $A(-1, 3)$ ، $B(1, -1)$ و $C(5, 1)$ هستند، طول میانه وارد از رأس A چقدر است؟
- ۱۵- ضلع‌های مثلث ABC روی خط‌های به معادله‌های $AB: y = x + 1$ ، $AC: y = -x + 1$ و $BC: y = 2x - 3$ قرار دارند. طول میانه CM چقدر است؟
- ۱۶- نقطه‌های $(3, 5)$ و $(-3, -3)$ وسط ضلع‌های AB و AC از مثلث ABC هستند. طول ضلع BC چقدر است؟
- ۱۷- نقطه‌های $A(1, 3)$ ، $B(2, 0)$ و $C(5, 1)$ سه رأس متوازی‌الاضلاع $ABCD$ هستند. مختصات رأس D را پیدا کنید.
- ۱۸- اگر نقطه‌های $(3, 2)$ و $(-1, 0)$ دو رأس متوازی‌الاضلاعی باشند که قطرهایش در نقطه $(2, -5)$ متقاطع‌اند، رأس‌های دیگر این متوازی‌الاضلاع را پیدا کنید.
- ۱۹- شیب خط راستی که از مبدأ و وسط پاره‌خط میان نقطه‌های $(0, -4)$ و $(8, 0)$ می‌گذرد چقدر است؟
- ۲۰- اگر $(a+1, 2)$ ، $(1, a+2)$ و $(\frac{1}{a+1}, \frac{2}{a+1})$ سه نقطه متمایز باشند که روی یک خط راست قرار دارند، مقدار a چقدر است؟

- ۲۱- وسط پاره‌خطی که نقطه‌های برخورد خط راست l با محورهای مختصات را به هم وصل می‌کند، نقطه $(3, 2)$ است. معادله خط l را بنویسید.
- ۲۲- معادله خط راستی را بنویسید که پاره‌خط میان نقطه‌های $(5, 4)$ و $(-7, 0)$ و نیز پاره‌خط میان نقطه‌های $(6, -5)$ و $(0, -3)$ را نصف می‌کند.
- ۲۳- محور x پاره‌خط میان نقطه‌های $(-3, -4)$ و $(1, -2)$ را به چه نسبتی تقسیم می‌کند؟
- ۲۴- نقطه‌های $A(2, 1)$ ، $B(-2, 3)$ و $C(4, 5)$ رأس‌های مثلث ABC هستند. معادله خط راستی که میانه نظیر رأس C روی آن قرار دارد و طول این میانه را پیدا کنید.
- ۲۵- معادله خط راستی را که از نقطه $(1, 2)$ می‌گذرد و بر خط $3x + 4y + 5 = 0$ عمود است بنویسید.
- ۲۶- معادله خط راستی را بنویسید که بر خط $4x - y + 8 = 0$ عمود باشد و از وسط پاره‌خط میان دو نقطه $(1, 5)$ و $(3, 11)$ بگذرد.
- ۲۷- معادله خط راستی را بنویسید که از وسط پاره‌خط میان نقطه‌های $(2, -19)$ و $(6, 1)$ می‌گذرد و بر خط راستی که از نقطه‌های $(-1, 3)$ و $(5, -1)$ می‌گذرد عمود است.
- ۲۸- معادله خط راستی را بنویسید که بر خط $x - 7y + 5 = 0$ عمود است و طول از مبدأ آن ۳ است.
- ۲۹- نقطه $(-4, 5)$ یکی از رأس‌های مربعی است که یکی از قطرهایش روی خط راست $7x - y + 8 = 0$ قرار دارد. معادله خط راستی را که قطر دیگر روی آن است بنویسید.
- ۳۰- نقطه‌های $A(-1, 5)$ ، $B(0, 0)$ و $C(2, 2)$ رأس‌های مثلث ABC هستند و D وسط ضلع BC است. معادله خط راستی را بنویسید که از B می‌گذرد و بر AD عمود است.
- ۳۱- معادله عمود منصف پاره‌خط میان نقطه‌های $(1, 1)$ و $(5, 7)$ را بنویسید.
- ۳۲- پای عمود وارد از مبدأ بر خط راست l نقطه $(-2, 9)$ است. معادله خط l را بنویسید.
- ۳۳- کدامیک از خط‌های $x - y + 3 = 0$ و $x - 4y - 7 = 0$ از مبدأ دورتر است؟
- ۳۴- فاصله نقطه $(4, 2)$ از خط راستی که از نقطه‌های $(4, 1)$ و $(2, 3)$ می‌گذرد چقدر است؟
- ۳۵- معادله خط راستی را بنویسید که از نقطه $(0, 1)$ می‌گذرد و فاصله نقطه $(2, 2)$ از آن برابر با ۱ است.
- ۳۶- معادله خط‌های راستی را بنویسید که بر خط $2x + y = 0$ عمودند و فاصله مبدأ از آن‌ها برابر $\sqrt{5}$ است.
- ۳۷- در مثلث ABC با رأس‌های $A(3, 1)$ ، $B(-1, 4)$ و $C(2, -3)$ ، طول ارتفاع وارد بر BC چقدر است؟
- ۳۸- دو ضلع از مستطیلی روی خط‌های $3x - 2y - 5 = 0$ و $2x + 3y + 6 = 0$ هستند و نقطه $(-2, 1)$ یک رأس از این مستطیل است. مساحت این مستطیل چقدر است؟
- ۳۹- نقطه‌های روی خط $x + y + 3 = 0$ را که فاصله آن‌ها از خط $x + 2y + 2 = 0$ برابر $\sqrt{5}$ است پیدا کنید.
- ۴۰- مساحت مثلثی که رأس‌هایش نقطه‌های $(2, 7)$ ، $(3, -1)$ و $(-5, 6)$ هستند چقدر است؟
- ۴۱- اگر نقطه $(-2, 6)$ قرینه نقطه $(4, 2)$ نسبت به خط راست l باشد، معادله خط l را بنویسید.
- ۴۲- قرینه نقطه $(4, -13)$ را نسبت به خط $5x + y + 6 = 0$ پیدا کنید.
- ۴۳- فاصله خط‌های $3x - 4y = 8$ و $6x - 8y + 5 = 0$ چقدر است؟
- ۴۴- ثابت کنید فاصله خط $5x - 2y - 1 = 0$ تا خط‌های $5x - 2y - 9 = 0$ و $5x - 2y + 7 = 0$ برابر است.
- ۴۵- معادله خط‌های راستی را بنویسید که با خط $5x - 12y + 26 = 0$ موازی هستند و فاصله آن‌ها از این خط برابر ۴ است.

فصل اول

درس اول: هندسه تحلیلی

پرسش های چهارگزینه ای

- ۱- اگر A و B و C نقاطی روی محور طول ها باشند و $x_A = m-1$ ، $x_B = 2m$ ، $x_C = 3m+1$ و $2AB - BC = 3$ ، مجموع مقادیر ممکن برای m کدام است؟

(۱) -۲	(۲) ۲	(۳) ۳	(۴) -۳
--------	-------	-------	--------
- ۲- نقطه وسط پاره خط میان نقطه های (۳، -۲) و (-۴، ۵) کدام است؟

(۱) (۳، -۴)	(۲) (-۳، ۴)	(۳) (-۱، ۴)	(۴) (-۱، ۱)
-------------	-------------	-------------	-------------
- ۳- نقطه $M(4, -3)$ وسط پاره خط میان نقطه های $A(m+1, 2)$ و $B(3, m+n)$ است. مقدار mn کدام است؟

(۱) -۳۲	(۲) -۳۶	(۳) -۴۸	(۴) -۵۲
---------	---------	---------	---------
- ۴- نقاط $A(2, 3)$ ، $B(3, 4)$ و $C(4, 2)$ و رأس های متوازی الاضلاع ABCD هستند. مختصات رأس D کدام است؟

(۱) (۳، ۱)	(۲) (-۱، ۲)	(۳) (-۲، ۳)	(۴) (-۳، -۱)
------------	-------------	-------------	--------------
- ۵- نقطه های $(2, a)$ ، $(1, 4)$ ، $(b, 3)$ و $(3, 2)$ رأس های یک متوازی الاضلاع هستند. مقدار $a-b$ چقدر است؟

(۱) ۱	(۲) ۲	(۳) ۳	(۴) ۴
-------	-------	-------	-------
- ۶- نقطه های $A(-1, 2)$ ، $B(2, 1)$ و $C(0, 4)$ رأس های مثلث ABC هستند. معادله میانه ای که از رأس B می گذرد کدام است؟

(۱) $5y + 4x = 13$	(۲) $5y - 4x = 13$	(۳) $5y + 4x = -13$	(۴) $5y - 4x = -13$
--------------------	--------------------	---------------------	---------------------
- ۷- اگر A و B نقطه های $(2, 1)$ و $(4, -3)$ باشند، فاصله وسط پاره خط AB از مبدأ مختصات کدام است؟

(۱) $\sqrt{5}$	(۲) $\sqrt{10}$	(۳) $\sqrt{15}$	(۴) $\sqrt{20}$
----------------	-----------------	-----------------	-----------------
- ۸- طول میانه ای که از رأس A در مثلث ABC با رأس های $A(4, 7)$ ، $B(-1, 2)$ و $C(3, 4)$ می گذرد چقدر است؟

(۱) ۵	(۲) ۶	(۳) ۷	(۴) ۸
-------	-------	-------	-------
- ۹- اگر فاصله نقطه $(a, a\sqrt{3})$ از مبدأ مختصات برابر ۶ باشد، مقدار a کدام است؟

(۱) ± 2	(۲) ± 3	(۳) ± 1	(۴) ± 5
-------------	-------------	-------------	-------------
- ۱۰- فاصله دو نقطه $A(-2m, m)$ و $B(3m, -m)$ برابر $\sqrt{58}$ است. m کدام است؟

(۱) ± 2	(۲) $\pm \sqrt{2}$	(۳) $\pm \sqrt{8}$	(۴) ± 4
-------------	--------------------	--------------------	-------------
- ۱۱- نقطه های $A(\frac{1}{2}, -3)$ و $B(a, 2a)$ مفروض اند. اگر طول پاره خط AB برابر با $\frac{\sqrt{13}}{2}$ باشد، مجموع مقادیر ممکن a چقدر است؟

(۱) $-\frac{11}{5}$	(۲) $\frac{9}{5}$	(۳) $\frac{11}{5}$	(۴) $-\frac{9}{5}$
---------------------	-------------------	--------------------	--------------------
- ۱۲- نقاط $A(1, 4)$ ، $B(k, 5)$ و $C(4, 1)$ در صفحه مختصات مفروض هستند. اگر $AB = BC$ ، مقدار k کدام است؟

(۱) ۵	(۲) -۵	(۳) ۴	(۴) -۴
-------	--------	-------	--------
- ۱۳- اگر A و B نقطه های $(a, 2)$ و $(1, a)$ باشند و فاصله نقطه M، وسط پاره خط AB، از مبدأ مختصات برابر ۲ باشد، مجموع مقادیر ممکن برای a کدام است؟

(۱) -۳	(۲) -۴	(۳) ۳	(۴) ۴
--------	--------	-------	-------
- ۱۴- نقاط $A(-3, 6)$ ، $B(-7, -3)$ و $C(2, 1)$ سه رأس مثلث ABC هستند. نوع مثلث کدام است؟

(۱) قائم الزاویه	(۲) متساوی الساقین
(۳) متساوی الاضلاع	(۴) قائم الزاویه متساوی الساقین

- ۱۵- عرض نقطه‌ای روی محور y که از نقطه‌های $(-۴, ۰)$ و $(۹, ۵)$ به یک فاصله است، چقدر است؟
- (۱) $\frac{۲۴}{۱۳}$ (۲) $-\frac{۴۵}{۱۳}$ (۳) ۹ (۴) -۱۲
- ۱۶- فاصله کدام نقطه روی خط $y=x$ از دو نقطه $A(۱, ۲)$ و $B(۲, ۵)$ برابر است؟
- (۱) $(\frac{۷}{۲}, \frac{۷}{۲})$ (۲) $(۳, ۳)$ (۳) $(۴, ۴)$ (۴) $(\frac{۹}{۲}, \frac{۹}{۲})$
- ۱۷- طول نقطه‌ای که روی خط $y=-۲x+۵$ است و فاصله‌اش تا نقطه‌های $(-۱, ۲)$ و $(۱, ۴)$ برابر است چقدر است؟
- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) -۲ (۴) ۲
- ۱۸- خطوط $۲x-ay=۱$ و $a^۲x-۴y=۳$ برهم عمودند. مقدار a کدام می‌تواند باشد؟
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) -۲
- ۱۹- اگر خط‌های $۳x-ky+۶=۰$ و $(k-۵)x+۲y-۴=۰$ بر هم عمود باشند، مقدار k چقدر است؟
- (۱) -۱۲ (۲) ۱۲ (۳) -۱۵ (۴) ۱۵
- ۲۰- اگر در مثلث ABC با رأس‌های $A(۳, -۵)$ ، $B(۲, ۱)$ و $C(m, ۲)$ زاویه B قائمه باشد، مقدار m چقدر است؟
- (۱) -۱۰ (۲) ۸ (۳) ۱۰ (۴) -۸
- ۲۱- معادله خط راستی که از نقطه $(-۱, -۲)$ می‌گذرد و بر خط $۳x+۸y=۱۲$ عمود است کدام است؟
- (۱) $۸x-۳y+۲=۰$ (۲) $۸x-۳y-۲=۰$ (۳) $۳x-۸y+۲=۰$ (۴) $۳x-۸y-۲=۰$
- ۲۲- معادله خط راستی که از نقطه $(۰, -۵)$ می‌گذرد و بر خط راستی که از نقطه‌های $(-۱, ۶)$ و $(-۲, -۳)$ می‌گذرد عمود است کدام است؟
- (۱) $x+۹y+۴۵=۰$ (۲) $x+۹y-۴۵=۰$ (۳) $-x+۹y+۴۵=۰$ (۴) $x-۹y+۴۵=۰$
- ۲۳- خط‌های $ax+۲y-۴=۰$ و $۲x+by+۶=۰$ بر هم عمودند و یکدیگر را روی محور y قطع می‌کنند. مقدار ab چقدر است؟
- (۱) ۹ (۲) ۸ (۳) -۹ (۴) -۸
- ۲۴- اگر خط‌های $۳x+y=۴$ ، $x-ay=۷$ و $bx+۲y=-۵$ سه ضلع متوالی یک مستطیل باشند، مقدار $a+b$ چقدر است؟
- (۱) ۱۰ (۲) ۹ (۳) ۸ (۴) ۷
- ۲۵- معادله ارتفاع وارد از رأس A در مثلث ABC با رأس‌های $A(-۲, ۴)$ ، $B(۲, ۱)$ و $C(-۱, -۳)$ کدام است؟
- (۱) $۳x+۴y-۱۰=۰$ (۲) $۳x+۴y+۱۰=۰$ (۳) $۴x+۳y-۱۰=۰$ (۴) $۴x+۳y+۱۰=۰$
- ۲۶- نقطه $(m, m-۴)$ روی عمود منصف پاره‌خط میان نقطه‌های $(-۳, ۱۰)$ و $(-۹, -۲)$ است. مقدار m چقدر است؟
- (۱) $\frac{۱۰}{۳}$ (۲) -۲ (۳) $-\frac{۱۰}{۳}$ (۴) ۲
- ۲۷- معادله عمود منصف پاره‌خط میان نقطه‌های $(-۵, ۲)$ و $(-۷, -۴)$ کدام است؟
- (۱) $x+۳y-۹=۰$ (۲) $۳x+y-۹=۰$ (۳) $x+۳y+۹=۰$ (۴) $۳x+y+۹=۰$
- ۲۸- نقطه‌های $(۴, ۴)$ و $(۲, -۲)$ نسبت به خط $x+ky-۶=۰$ قرینه یکدیگرند. مقدار k چقدر است؟
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
- ۲۹- فاصله مبدأ مختصات از خط $\frac{x}{۹}+\frac{y}{۱۲}=۱$ چقدر است؟
- (۱) $\frac{۲۴}{۵}$ (۲) $\frac{۳۶}{۵}$ (۳) $\frac{۱۲}{۵}$ (۴) $\frac{۴۸}{۵}$
- ۳۰- اگر $A(۱, ۲)$ ، $B(-۲, ۱)$ و $C(۰, ۲)$ رأس‌های مثلث ABC باشند، اندازه ارتفاع AH کدام است؟
- (۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ (۲) $\frac{۱}{۲}$ (۳) $\frac{\sqrt{۵}}{۵}$ (۴) $\frac{\sqrt{۱۰}}{۱۰}$
- ۳۱- فاصله نقطه $A(k, ۲)$ از خط $x+۲y-۱=۰$ برابر $۲\sqrt{۵}$ است. مقدارهای k کدام هستند؟
- (۱) ۱۳ یا -۷ (۲) ۴ یا -۱۴ (۳) ۷ یا -۱۳ (۴) ۶ یا -۱۴

- ۳۲- فاصله نقطه $(\frac{1}{2}, k)$ از خط $12x + 9y = 1$ برابر ۲ است. مجموع مقادیرهای مختلف k چقدر است؟
- (۱) $\frac{10}{9}$ (۲) $\frac{5}{9}$ (۳) $-\frac{5}{9}$ (۴) $-\frac{10}{9}$
- ۳۳- فاصله مبدأ مختصات از خط راستی که بر خط به معادله $2y + x = 1$ عمود است و از نقطه $(-1, 2)$ می‌گذرد، چقدر است؟
- (۱) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ (۲) $\frac{4}{\sqrt{5}}$ (۳) $\frac{2}{\sqrt{17}}$ (۴) $\frac{4}{\sqrt{17}}$
- ۳۴- شیب خط راستی که از نقطه $A(-2, 1)$ می‌گذرد و فاصله‌اش از نقطه $B(3, 1)$ برابر ۴ است کدام است؟
- (۱) $\pm \frac{4}{3}$ (۲) $\pm \frac{2}{3}$ (۳) $\pm \frac{4}{5}$ (۴) $\pm \frac{3}{5}$
- ۳۵- فاصله نقطه $A(k, -1)$ از خط $y = 2x + k$ دو برابر فاصله A از خط $y = x - 1$ است. مقدار k کدام است؟
- (۱) $\frac{3}{5}$ یا 1 (۲) 1 یا $-\frac{3}{5}$ (۳) 1 یا $-\frac{3}{5}$ (۴) 1 یا $-\frac{3}{5}$
- ۳۶- خط $6x + 8y + 1 = 0$ بر دایره‌ای به مرکز $O(1, -1)$ مماس است. مساحت دایره کدام است؟
- (۱) $\frac{\pi}{20}$ (۲) $\frac{\pi}{40}$ (۳) $\frac{\pi}{50}$ (۴) $\frac{\pi}{100}$
- ۳۷- ضلع BC از مربع $ABCD$ روی خط $3x - 4y + 2 = 0$ است و A نقطه $(2, -3)$ است. مساحت این مربع چقدر است؟
- (۱) 16 (۲) 24 (۳) 32 (۴) 49
- ۳۸- معادله یک قطر مربعی $x + y - 4 = 0$ و مختصات یک رأس آن $(3, 2)$ است. محیط مربع کدام است؟
- (۱) 2 (۲) $2\sqrt{2}$ (۳) 4 (۴) $4\sqrt{2}$
- ۳۹- فاصله خط‌های $x - 2y + 5 = 0$ و $3x - 6y + 9 = 0$ چقدر است؟
- (۱) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ (۲) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ (۳) $\sqrt{5}$ (۴) $2\sqrt{5}$
- ۴۰- مساحت مربعی که دو ضلع آن روی خطوط $y = \frac{1}{2}x + 1$ و $x - 2y + 4 = 0$ قرار دارند، کدام است؟
- (۱) $\frac{16}{5}$ (۲) $\frac{9}{5}$ (۳) $\frac{4}{5}$ (۴) 5
- ۴۱- فاصله دو خط موازی $x - 4y + c = 0$ و $3x - 12y + 9 = 0$ برابر $\sqrt{17}$ است. کوچک‌ترین مقدار c کدام است؟
- (۱) 6 (۲) -4 (۳) -14 (۴) -20
- ۴۲- فاصله خط‌های موازی $3x + 4y = 6$ و $3x - ky + 4 = 0$ برابر m است. مقدار $k + m$ چقدر است؟
- (۱) $\frac{9}{15}$ (۲) $-\frac{27}{5}$ (۳) $-\frac{53}{15}$ (۴) $\frac{44}{15}$
- ۴۳- فاصله کدام خط از خط $3x + 4y + 10 = 0$ برابر ۴ است؟
- (۱) $3x + 4y = 10$ (۲) $3x + 4y = 30$ (۳) $3x + 4y = 20$ (۴) $3x + 4y = 15$

فصل هشتم

راه حل تمرین‌ها

۱ اگر این نقطه را $(a, 0)$ فرض کنیم، آن گاه

$$\sqrt{(a-7)^2 + (0-6)^2} = \sqrt{(a+3)^2 + (0-4)^2}$$

$$(a-7)^2 + 36 = (a+3)^2 + 16$$

$$a^2 - 14a + 49 + 36 = a^2 + 6a + 9 + 16 \Rightarrow 20a = 60 \Rightarrow a = 3$$

پس نقطه مورد نظر $(3, 0)$ است.

۲ اگر این نقطه را $(0, a)$ فرض کنیم، آن گاه

$$\sqrt{(0+5)^2 + (a+2)^2} = \sqrt{(0-3)^2 + (a-2)^2}$$

$$25 + a^2 + 4a + 4 = 9 + a^2 - 4a + 4 \Rightarrow 8a = -16 \Rightarrow a = -2$$

بنابراین $(0, -2)$ نقطه مورد نظر است.

۳ ابتدا فاصله نقطه $A(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$ از نقطه‌های $B(3, -5)$ و $C(-7, 9)$ را حساب می‌کنیم.

$$AB = \sqrt{(3-\frac{1}{2})^2 + (-5+\frac{3}{2})^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{49}{4}} = \frac{\sqrt{74}}{2}$$

$$AC = \sqrt{(-7-\frac{1}{2})^2 + (9+\frac{3}{2})^2} = \sqrt{\frac{225}{4} + \frac{441}{4}} = \frac{\sqrt{666}}{2}$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{666}}{\sqrt{74}} = \sqrt{9} = 3$$

پس پاره‌خط BC توسط نقطه A به نسبت ۱ به ۳ تقسیم شده است.

۴ فاصله نقطه‌های $O(0, 0)$ ، $A(4, 3)$ و $B(0, 3)$ را حساب می‌کنیم.

$$OA = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5, \quad OB = \sqrt{0^2 + 3^2} = 3, \quad AB = \sqrt{4^2 + 0^2} = 4$$

بنابراین محیط مثلث برابر است با $5 + 3 + 4 = 12$.

۵ فاصله نقطه‌های $A(\sqrt{3}, 1)$ ، $B(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ و $C(1, \sqrt{3})$ را حساب می‌کنیم.

$$AB = \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2 + (1-\sqrt{2})^2}$$

$$AC = \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2 + (1-\sqrt{3})^2}$$

$$BC = \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2 + (1-\sqrt{2})^2}$$

بنابراین $AB = BC$ و مثلث ABC متساوی الساقین است.

۶ اگر $A(15, 5)$ ، $B(5, 5)$ و $C(10, 15)$ رأس‌های مثلث ABC

باشند، اندازه ضلع‌های مثلث را حساب می‌کنیم

$$AB = \sqrt{(15-5)^2 + (5-5)^2} = 10$$

$$AC = \sqrt{(15-10)^2 + (5-15)^2} = \sqrt{125}$$

$$BC = \sqrt{(5-10)^2 + (5-15)^2} = \sqrt{125}$$

بنابراین $BC = AC$ و مثلث ABC متساوی الساقین است.

۷ فاصله دو نقطه برابر است با $\sqrt{(a-3)^2 + (2-8)^2}$. بنابراین

$$\sqrt{(a-3)^2 + (-6)^2} = 8 \Rightarrow (a-3)^2 + 36 = 64$$

$$(a-3)^2 = 28 \Rightarrow a-3 = \pm\sqrt{28} \Rightarrow a = 3 \pm \sqrt{28}$$

۸ ابتدا طول پاره‌خط‌های AB و BC را حساب می‌کنیم

$$AB = \sqrt{(1-6)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{41}$$

$$BC = \sqrt{(a-1)^2 + (8-3)^2} = \sqrt{(a-1)^2 + 25}$$

بنابراین

$$AB = BC \Rightarrow (a-1)^2 + 25 = 41 \Rightarrow (a-1)^2 = 16$$

$$\begin{cases} a-1=4 \\ a-1=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=5 \\ a=-3 \end{cases}$$

۹ اگر این نقطه $A(a, b)$ باشد، فاصله‌اش را از نقطه‌های $B(5, -1)$

و $C(2, -4)$ حساب می‌کنیم.

$$AB = \sqrt{(a-5)^2 + (b+1)^2}, \quad AC = \sqrt{(a-2)^2 + (b+4)^2}$$

بنابراین

$$AB = AC \Rightarrow (a-5)^2 + (b+1)^2 = (a-2)^2 + (b+4)^2$$

$$a^2 - 10a + 25 + b^2 + 2b + 1 = a^2 - 4a + 4 + b^2 + 8b + 16$$

$$6a + 6b = 6 \Rightarrow a = 1 - b$$

اکنون توجه کنید که $A(a, b)$ روی خط $x - 2y - 4 = 0$ است، پس

$$a - 2b - 4 = 0 \Rightarrow 1 - b - 2b - 4 = 0 \Rightarrow b = -1 \Rightarrow a = 2$$

بنابراین $A(2, -1)$ نقطه مورد نظر است.

۱۰ طول ضلع‌های مثلث ABC را حساب می‌کنیم.

$$AB = \sqrt{(-a-a)^2 + (-a-a)^2} = \sqrt{4a^2}$$

$$AC = \sqrt{(-a\sqrt{3}-a)^2 + (a\sqrt{3}-a)^2} = \sqrt{4a^2}$$

$$BC = \sqrt{(-a\sqrt{3}+a)^2 + (a\sqrt{3}+a)^2} = \sqrt{4a^2}$$

بنابراین $AB = AC = BC$ و مثلث ABC متساوی الاضلاع است.

۱۱ فرض می‌کنیم $C(a, b)$ رأس سوم مثلث باشد، در این صورت

می‌توان نوشت

$$AB = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}, \quad AC = \sqrt{(a-3)^2 + (b-3)^2}$$

$$BC = \sqrt{(a+1)^2 + (b-1)^2}$$

پس

$$AC = BC \Rightarrow (a-3)^2 + (b-3)^2 = (a+1)^2 + (b-1)^2$$

$$a^2 - 6a + 9 + b^2 - 6b + 9 = a^2 + 2a + 1 + b^2 - 2b + 1$$

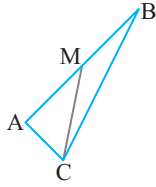
$$2a + b = 4 \Rightarrow b = 4 - 2a$$

از طرف دیگر،

اکنون مختصات M وسط AB را حساب می‌کنیم:

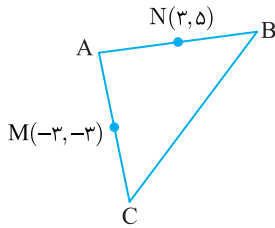
$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{0 + 4}{2} = 2, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1 + 5}{2} = 3$$

فاصله نقطه‌های C و M برابر طول میانه CM است.



$$CM = \sqrt{\left(2 - \frac{4}{2}\right)^2 + \left(3 - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(2 - 2\right)^2 + \left(3 - 0.5\right)^2} = \sqrt{0 + 6.25} = 2.5$$

۱۶ طول ضلع BC دو برابر طول پاره خط MN است. پس



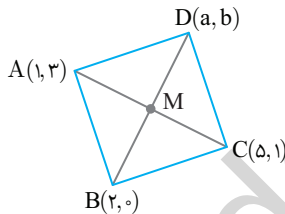
$$BC = 2MN = 2\sqrt{(3+3)^2 + (5+3)^2} = 2\sqrt{36 + 64} = 2\sqrt{100} = 20$$

۱۷ چون M وسط قطرهای AC و BD است، پس

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{x_B + x_D}{2} \Rightarrow 1 + 5 = 2 + x_D \Rightarrow x_D = 4$$

$$y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{y_B + y_D}{2} \Rightarrow 3 + 1 = 0 + y_D \Rightarrow y_D = 4$$

پس D(4,4) رأس دیگر متوازی الاضلاع است.



۱۸ ابتدا توجه کنید که چون (2, -5) وسط پاره خطی که نقطه‌های

(3, 2) و (-1, 0) را به هم وصل می‌کند، نیست پس این نقطه‌ها دو رأس

مقابل متوازی الاضلاع نیستند و دو رأس مجاور هستند. مطابق شکل،

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} \Rightarrow 2 = \frac{-1 + x_C}{2} \Rightarrow x_C = 5$$

$$y_M = \frac{y_A + y_C}{2} \Rightarrow -5 = \frac{0 + y_C}{2} \Rightarrow y_C = -10$$

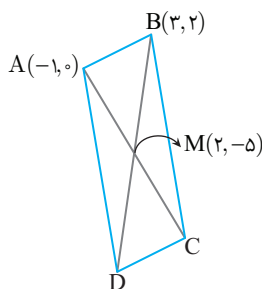
$$x_M = \frac{x_B + x_D}{2} \Rightarrow 2 = \frac{3 + x_D}{2} \Rightarrow x_D = 1$$

$$y_M = \frac{y_B + y_D}{2} \Rightarrow -5 = \frac{2 + y_D}{2} \Rightarrow y_D = -12$$

پس نقطه‌های C(5, -10) و

D(1, -12) رأس‌های دیگر

متوازی الاضلاع هستند.



$$AC = AB \Rightarrow (a-3)^2 + (b-3)^2 = 20$$

$$(a-3)^2 + (4-2a-3)^2 = 20$$

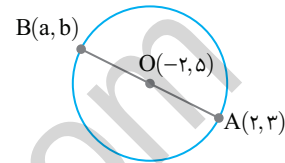
$$a^2 - 6a + 9 + 4a^2 - 4a + 1 = 20 \Rightarrow 5a^2 - 10a - 10 = 0$$

$$a^2 - 2a - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 + \sqrt{3} \Rightarrow b = 2 - 2\sqrt{3} \\ a = 1 - \sqrt{3} \Rightarrow b = 2 + 2\sqrt{3} \end{cases}$$

۱۲ چون O وسط AB است، پس

$$-2 = \frac{2+a}{2} \Rightarrow a = -6, \quad 5 = \frac{3+b}{2} \Rightarrow b = 7$$

پس B(-6, 7) سر دیگر قطر است.



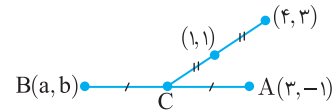
۱۳ با توجه به شکل زیر

$$1 = \frac{x_C + 4}{2} \Rightarrow x_C = -2, \quad 1 = \frac{y_C + 3}{2} \Rightarrow y_C = -1$$

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow -2 = \frac{3+a}{2} \Rightarrow a = -7$$

$$y_C = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow -1 = \frac{-1+b}{2} \Rightarrow b = -1$$

پس B(-7, -1) نقطه مطلوب است.



۱۴ ابتدا نقطه M وسط ضلع BC را معین می‌کنیم.

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{1+5}{2} = 3, \quad y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{-1+1}{2} = 0$$

اکنون طول میانه AM را حساب می‌کنیم.

$$AM = \sqrt{(3+1)^2 + (0-3)^2} = 5$$

۱۵ ابتدا مختصات سه رأس مثلث را حساب می‌کنیم. کافی است توجه

کنیم که خط‌های داده شده در چه نقطه‌هایی یکدیگر را قطع می‌کنند.

$$\begin{cases} AB: y = x + 1 \\ AC: y = -x + 1 \end{cases} \Rightarrow x + 1 = -x + 1 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 1$$

یعنی مختصات رأس A به صورت (0, 1) است. به همین ترتیب

$$\begin{cases} AB: y = x + 1 \\ BC: y = 2x - 3 \end{cases} \Rightarrow x + 1 = 2x - 3 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow y = 5 \Rightarrow B(4, 5)$$

$$\begin{cases} AC: y = -x + 1 \\ BC: y = 2x - 3 \end{cases} \Rightarrow -x + 1 = 2x - 3 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$$

$$y = -\frac{1}{3} \Rightarrow C\left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

۱۹ وسط پاره خط میان نقطه های $(0, -4)$ و $(8, 0)$ نقطه

می گذرد، با شیب خطی که از مبدأ، یعنی نقطه $(\frac{0+8}{2}, \frac{-4+0}{2})$ یعنی $(4, -2)$ است. شیب خطی که از مبدأ، یعنی نقطه

$(0, 0)$ و نقطه $(4, -2)$ می گذرد برابر است با $-\frac{1}{2}$.

۲۰ اگر نقطه های A, B و C روی یک خط راست باشند، شیب خطی که از A و B می گذرد، با شیب خطی که از B و C می گذرد برابر است. شیب خطی که از

نقطه های $(1, a+2)$ و $(a+1, 2)$ می گذرد برابر است با $-\frac{a+2-2}{1-(a+1)} = \frac{a}{-a} = -1$.

توجه کنید که چون نقطه ها متمایزند، پس $a \neq 0$ ، زیرا اگر $a = 0$ ، آن وقت

نقطه های $(1, a+2)$ و $(a+1, 2)$ یکسان می شوند. شیب خطی که از

نقطه های $(1, a+2)$ و $(\frac{1}{a+1}, \frac{2}{a+1})$ می گذرد برابر است با

$$\frac{\frac{2}{a+1} - (a+2)}{\frac{1}{a+1} - 1} = \frac{2 - (a+1)(a+2)}{1 - (a+1)} = \frac{2 - (a^2 + 3a + 2)}{-a} = \frac{-a^2 - 3a}{-a} = a + 3$$

در نتیجه باید $a + 3 = -1$ ، بنابراین $a = -4$.

۲۱ فرض کنید نقطه های برخورد خط l با محورهای مختصات نقطه های

$(a, 0)$ و $(0, b)$ باشند. در این صورت وسط پاره خط میان این نقطه ها، نقطه

$(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$ است. به این ترتیب

$$(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}) = (3, 2) \Rightarrow a = 6, \quad b = 4$$

معادله خطی که از نقطه های $(0, 4)$ و $(6, 0)$ می گذرد به صورت زیر است:

$$y - 0 = \frac{0-4}{6-0}(x-6) \Rightarrow y = -\frac{2}{3}(x-6) \Rightarrow 2x + 3y - 12 = 0$$

۲۲ خط مورد نظر از وسط پاره خط میان نقطه های $(5, 4)$ و $(-7, 0)$ و

نیز وسط پاره خط میان نقطه های $(6, -5)$ و $(0, -3)$ می گذرد. وسط پاره خط

میان نقطه های $(5, 4)$ و $(-7, 0)$ نقطه $(-1, 2)$ است. وسط پاره خط میان

نقطه های $(6, -5)$ و $(0, -3)$ نقطه $(3, -4)$ است. معادله خطی که از

نقطه های $(-1, 2)$ و $(3, -4)$ می گذرد به صورت زیر است:

$$y - 2 = \frac{2 - (-4)}{-1 - 3}(x - (-1)) \Rightarrow y - 2 = -\frac{3}{4}(x + 1) \Rightarrow 3x + 4y - 1 = 0$$

۲۳ معادله خطی که از نقطه های $(-3, -4)$ و $(1, -2)$ می گذرد به

صورت زیر است:

$$y - (-4) = \frac{-4 - (-2)}{-3 - 1}(x - (-3)) \Rightarrow x - 2y - 5 = 0$$

محل برخورد این خط با محور x نقطه $(5, 0)$ است. فاصله این نقطه را تا دو

سر پاره خط حساب می کنیم:

$$(-3, -4) \text{ تا } (5, 0) \text{ فاصله } = \sqrt{(5+3)^2 + (0+4)^2} = \sqrt{80}$$

$$(1, -2) \text{ تا } (5, 0) \text{ فاصله } = \sqrt{(5-1)^2 + (0+2)^2} = \sqrt{20}$$

نسبت این فاصله ها برابر است با $\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{20}} = 2$.

یعنی محور x پاره خط مدنظر را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم می کند.

۲۴ میانه نظیر رأس C از وسط ضلع AB می گذرد. وسط ضلع AB ،

وسط پاره خط میان نقطه های $(2, 1)$ و $(-2, 3)$ است که می شود نقطه

$(\frac{2-2}{2}, \frac{1+3}{2})$ ، یعنی نقطه $(0, 2)$. معادله خطی که از نقطه های $(0, 2)$ و

$C(4, 5)$ می گذرد به صورت زیر است:

$$y - 2 = \frac{5-2}{4-0}(x-0) \Rightarrow 3x - 4y + 8 = 0$$

طول میانه نظیر رأس C برابر با فاصله نقطه $C(4, 5)$ از نقطه $(0, 2)$ است،

که برابر است با $\sqrt{(4-0)^2 + (5-2)^2} = 5$.

۲۵ شیب خط $3x + 4y + 5 = 0$ برابر با $-\frac{3}{4}$ است. در نتیجه، اگر شیب

خط مورد نظر برابر m باشد، باید $-\frac{3}{4} \times m = -1$ ، در نتیجه $m = \frac{4}{3}$. معادله

خطی که شیب آن $\frac{4}{3}$ است و از نقطه $(1, 2)$ می گذرد به صورت زیر است:

$$y - 2 = \frac{4}{3}(x - 1) \Rightarrow 4x - 3y + 2 = 0$$

۲۶ وسط پاره خط میان نقطه های $(1, 5)$ و $(3, 11)$ نقطه

$(\frac{3+1}{2}, \frac{11+5}{2})$ یعنی $(2, 8)$ است. شیب خط $4x - y + 8 = 0$ برابر با ۴

است. اگر شیب خط مورد نظر برابر m باشد، باید $4m = -1$ ، در نتیجه

$m = -\frac{1}{4}$. معادله خطی که شیب آن $-\frac{1}{4}$ است و از نقطه $(2, 8)$ می گذرد

به صورت زیر است:

$$y - 8 = -\frac{1}{4}(x - 2) \Rightarrow x + 4y - 34 = 0$$

۲۷ وسط پاره خط میان نقطه های $(2, -19)$ و $(6, 1)$ نقطه

$(\frac{2+6}{2}, \frac{-19+1}{2})$ ، یعنی $(4, -9)$ است. شیب خطی که از نقطه های

$(-1, 3)$ و $(5, -1)$ می گذرد برابر است با $-\frac{2}{3}$. اگر شیب خط

مورد نظر برابر m باشد، باید $(-\frac{2}{3})m = -1$ ، در نتیجه $m = \frac{3}{2}$. معادله

خطی که شیب آن $\frac{3}{2}$ است و از نقطه $(4, -9)$ می گذرد به صورت زیر است:

$$y - (-9) = \frac{3}{2}(x - 4) \Rightarrow 3x - 2y - 30 = 0$$

۲۸ شیب خط $x - 7y + 5 = 0$ برابر با $\frac{1}{7}$ است. اگر شیب خط مورد نظر

برابر m باشد، باید $\frac{1}{7} \times m = -1$ ، در نتیجه $m = -7$. چون طول از مبدأ خط

مورد نظر ۳ است، پس این خط از نقطه $(3, 0)$ می گذرد.

معادله خطی که شیب آن برابر -7 است و از نقطه $(3, 0)$ می گذرد به صورت

زیر است:

$$y - 0 = -7(x - 3) \Rightarrow 7x + y - 21 = 0$$

فصل نهم

پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

توجه شود که در حالت اخیر $(2, a) = (b, 3) = (2, 3)$ که تشکیل متوازی الاضلاع نمی‌دهد.

۶- گزینه ۱ وسط ضلع AC نقطه $(\frac{-1+0}{2}, \frac{2+4}{2})$ یعنی $(-\frac{1}{2}, 3)$

است. معادله خطی که از نقطه‌های $(2, 1)$ و $(-\frac{1}{2}, 3)$ می‌گذرد به صورت زیر

$$y-1=\frac{1-3}{2+\frac{1}{2}}(x-2) \Rightarrow 5y+4x=13$$

است:

۷- گزینه ۲ ابتدا مختصات وسط AB را حساب می‌کنیم

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2+4}{2} = 3, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1-3}{2} = -1$$

بنابراین فاصله نقطه $M(3, -1)$ از $O(0, 0)$ را باید حساب کنیم

$$OM = \sqrt{(3-0)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{10}$$

۸- گزینه ۱ وسط ضلع BC نقطه $(\frac{-1+3}{2}, \frac{2+4}{2})$ یعنی $(1, 3)$

است. طول میانه وارد از رأس A برابر فاصله نقطه A و این نقطه است که

$$\sqrt{(4-1)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

می‌شود.

۹- گزینه ۲ فاصله نقطه $(a, a\sqrt{3})$ از مبدأ مختصات برابر است با

$$\sqrt{a^2 + (a\sqrt{3})^2} = \sqrt{a^2 + 3a^2} = \sqrt{4a^2} = 2|a| = 6$$

بنابراین $a = \pm 3$.

۱۰- گزینه ۲ فاصله A تا B برابر است با

$$AB = \sqrt{(3m+2m)^2 + (-m-m)^2} = \sqrt{25m^2} = \sqrt{25}|m|$$

بنابراین

$$\sqrt{25}|m| = \sqrt{58} \Rightarrow |m| = \sqrt{2} \Rightarrow m = \pm\sqrt{2}$$

۱۱- گزینه ۱ توجه کنید که

$$AB = \sqrt{(a-\frac{1}{2})^2 + (2a+3)^2} = \frac{\sqrt{13}}{2} \Rightarrow (a-\frac{1}{2})^2 + (2a+3)^2 = \frac{13}{4}$$

$$a^2 - a + \frac{1}{4} + 4a^2 + 12a + 9 = \frac{13}{4} \Rightarrow 5a^2 + 11a + 6 = 0$$

بنابراین مجموع مقدارهای ممکن a برابر است با مجموع جواب‌های این معادله،

$$\text{یعنی } -\frac{11}{5}$$

۱۲- گزینه ۱ توجه کنید که

$$AB = \sqrt{(k-1)^2 + (5-4)^2} = \sqrt{1+(k-1)^2}$$

$$BC = \sqrt{(k-4)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{16+(k-4)^2}$$

طبق فرض مسئله، باید $\sqrt{1+(k-1)^2} = \sqrt{16+(k-4)^2}$ در نتیجه

$$k^2 - 8k + 32 = k^2 - 2k + 2 \Rightarrow -8k + 32 = -2k + 2$$

$$-6k = -30 \Rightarrow k = 5$$

۱- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$AB = |x_B - x_A| = |2m - (m-1)| = |m+1|$$

$$BC = |x_C - x_B| = |3m+1 - 2m| = |m+1|$$

بنابراین

$$2|m+1| - |m+1| = 3 \Rightarrow |m+1| = 3 \Rightarrow \begin{cases} m+1=3 \Rightarrow m=2 \\ m+1=-3 \Rightarrow m=-4 \end{cases}$$

پس مجموع مقادیر ممکن برای m برابر است با -2.

۲- گزینه ۲ نقطه وسط پاره خط میان نقطه‌های (x_1, y_1) و

(x_2, y_2) نقطه $(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$ است. بنابراین، نقطه وسط پاره خط

میان نقطه‌های $(-2, 3)$ و $(-4, 5)$ نقطه $(\frac{-2-4}{2}, \frac{3+5}{2})$ یعنی نقطه $(-3, 4)$ است.

۳- گزینه ۳ ابتدا مختصات وسط AB را پیدا می‌کنیم

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{m+1+3}{2} = \frac{m+4}{2}, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2+m+n}{2}$$

بنابراین

$$\frac{m+4}{2} = 4 \Rightarrow m+4=8 \Rightarrow m=4$$

$$\frac{2+m+n}{2} = -3 \Rightarrow 2+4+n=-6 \Rightarrow n=-12$$

در نتیجه $mn = -48$.

۴- گزینه ۱ چون قطرهای متوازی الاضلاع یکدیگر را نصف می‌کنند،

مطابق شکل، M وسط AC و BD است. یعنی

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{x_B + x_D}{2}$$

$$\frac{2+4}{2} = \frac{3+x_D}{2} \Rightarrow x_D = 3$$

$$y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{y_B + y_D}{2}$$

$$\frac{3+2}{2} = \frac{4+y_D}{2} \Rightarrow y_D = 1$$

پس مختصات D به صورت $(3, 1)$ است.

۵- گزینه ۱ رأس‌های $(3, 2)$ و $(1, 4)$ در متوازی الاضلاع یا

مجاورند یا رأس‌های مقابل هستند بنابراین باید مقدار a و b را از دو رابطه زیر به دست آوریم:

$$\left(\frac{2+3}{2}, \frac{a+2}{2} \right) = \left(\frac{b+1}{2}, \frac{3+4}{2} \right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{b+1}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow b=4 \\ \frac{a+2}{2} = \frac{7}{2} \Rightarrow a=5 \end{cases} \Rightarrow a-b=1$$

$$\left(\frac{2+b}{2}, \frac{a+3}{2} \right) = \left(\frac{3+1}{2}, \frac{2+4}{2} \right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{2+b}{2} = 2 \Rightarrow b=2 \\ \frac{a+3}{2} = 3 \Rightarrow a=3 \end{cases} \Rightarrow a-b=1$$

۱۹- گزینه ۴ حاصل ضرب شیب‌های دو خط عمود بر هم برابر ۱- است. در نتیجه

$$\frac{3}{k} \times \frac{-(k-5)}{2} = -1 \Rightarrow 3(k-5) = 2k \Rightarrow k = 15$$

۲۰- گزینه ۲ حاصل ضرب شیب خط‌های AB و BC برابر ۱- است. در نتیجه

$$\frac{-5-1}{3-2} \times \frac{1-2}{2-m} = -1 \Rightarrow -6 \times \frac{-1}{2-m} = -1$$

$$2-m = -6 \Rightarrow m = 8$$

۲۱- گزینه ۱ شیب خطی که بر خط $3x + 8y = 12$ عمود است،

قرینه عکس شیب این خط است، یعنی برابر $\frac{1}{3}$ است. خطی که از نقطه $(-1, -2)$ با شیب $\frac{1}{3}$ می‌گذرد به صورت زیر است:

$$y + 2 = \frac{1}{3}(x + 1) \Rightarrow 3y + 6 = x + 1 \Rightarrow x - 3y - 5 = 0$$

۲۲- گزینه ۱ شیب خطی که از نقطه‌های $(-1, 6)$ و $(-2, -3)$

می‌گذرد برابر است با $\frac{6+3}{-1+2} = 9$. بنابراین شیب خطی که بر این خط عمود

است برابر است با $-\frac{1}{9}$. معادله خطی که شیب آن $-\frac{1}{9}$ است و از نقطه $(0, -5)$ می‌گذرد به صورت زیر است:

$$y - (-5) = -\frac{1}{9}(x - 0) \Rightarrow x + 9y + 45 = 0$$

۲۳- گزینه ۳ خط $ax + 2y - 4 = 0$ محور y را در نقطه $(0, 2)$ قطع

می‌کند. این نقطه روی خط $2x + by + 6 = 0$ نیز هست، بنابراین

$$2 \times 0 + b \times 2 + 6 = 0 \Rightarrow b = -3$$

چون دو خط برهم عمودند، حاصل ضرب شیب‌های آنها ۱- است:

$$\left(-\frac{a}{2}\right) \times \left(-\frac{2}{b}\right) = -1 \Rightarrow a = -b = 3$$

بنابراین $ab = -9$.

۲۴- گزینه ۲ خط $3x + y = 4$ بر خط $x - ay = 7$ عمود است، پس

حاصل ضرب شیب این خط‌ها ۱- است:

$$-3 \times \frac{1}{a} = -1 \Rightarrow a = 3$$

خط $x - 3y = 7$ بر خط $bx + 2y = -5$ عمود است، پس حاصل ضرب

شیب این خط‌ها ۱- است:

$$\frac{1}{3} \times \left(-\frac{b}{2}\right) = -1 \Rightarrow b = 6$$

بنابراین $a + b = 9$.

۲۵- گزینه ۱ شیب خط BC برابر است با $\frac{1+3}{2+1} = \frac{4}{3}$. حاصل ضرب

شیب‌های دو خط عمود برهم برابر ۱- است، پس شیب ارتفاع وارد از رأس

A برابر با $-\frac{3}{4}$ است. معادله ارتفاع مورد نظر، معادله خطی است که از نقطه

$A(-2, 4)$ با شیب $-\frac{3}{4}$ می‌گذرد:

$$y - 4 = -\frac{3}{4}(x + 2) \Rightarrow 4y - 16 = -3x - 6 \Rightarrow 3x + 4y - 10 = 0$$

۱۳- گزینه ۱ ابتدا مختصات M را حساب می‌کنیم

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{a+1}{2}, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2+a}{2}$$

بنابراین

$$OM = \sqrt{\left(\frac{a+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+2}{2}\right)^2} = 2 \Rightarrow \sqrt{\frac{a^2 + 2a + 1 + a^2 + 4a + 4}{4}} = 2$$

$$\frac{2a^2 + 6a + 5}{4} = 4 \Rightarrow 2a^2 + 6a - 11 = 0$$

پس مجموع مقادیر ممکن برای a برابر است با مجموع جواب‌های معادله اخیر

یعنی $-\frac{6}{2} = -3$.

۱۴- گزینه ۲ طول اضلاع را حساب می‌کنیم

$$AB = \sqrt{(-7+3)^2 + (-3-6)^2} = \sqrt{16+81} = \sqrt{97}$$

$$AC = \sqrt{(2+3)^2 + (1-6)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50}$$

$$BC = \sqrt{(2+7)^2 + (1+3)^2} = \sqrt{81+16} = \sqrt{97}$$

بنابراین مثلث متساوی‌الساقین است. توجه کنید که طول اضلاع در رابطه فیثاغورس صدق نمی‌کنند و مثلث قائم‌الزاویه نیست.

۱۵- گزینه ۳ نقطه مورد نظر را $(a, 0)$ بگیرید. در این صورت

$$\sqrt{(-4-a)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{(0-a)^2 + (a-5)^2}$$

$$\sqrt{16+a^2} = \sqrt{a^2+(a-5)^2} \Rightarrow 16+a^2 = a^2+(a-5)^2$$

$$16+a^2 = a^2+10a-25 \Rightarrow 10a=41 \Rightarrow a=4.1$$

۱۶- گزینه ۲ چون نقطه مورد نظر روی خط $y = x$ است، پس

به صورت (a, a) است. چون فاصله این نقطه از نقطه‌های $(1, 2)$ و $(2, 5)$

برابر است، پس

$$\sqrt{(a-1)^2 + (a-2)^2} = \sqrt{(a-2)^2 + (a-5)^2}$$

$$(a-1)^2 + (a-2)^2 = (a-2)^2 + (a-5)^2$$

$$(a-1)^2 = (a-5)^2 \Rightarrow a^2 - 2a + 1 = a^2 - 10a + 25$$

$$8a = 24 \Rightarrow a = 3$$

پس نقطه مورد نظر $(3, 3)$ است.

۱۷- گزینه ۴ فرض کنید نقطه مورد نظر نقطه (a, b) باشد. چون

این نقطه روی خط $y = -2x + 5$ است، پس $b = -2a + 5$. چون فاصله نقطه

(a, b) تا نقطه‌های $(-1, 2)$ و $(1, 4)$ برابر است، پس

$$\sqrt{(a+1)^2 + (b-2)^2} = \sqrt{(a-1)^2 + (b-4)^2}$$

$$(a+1)^2 + (b-2)^2 = (a-1)^2 + (b-4)^2$$

$$(a+1)^2 + (-2a+5-2)^2 = (a-1)^2 + (-2a+5-4)^2$$

$$(a+1)^2 + (-2a+3)^2 = (a-1)^2 + (-2a+1)^2$$

$$a^2 + 2a + 1 + 4a^2 - 12a + 9 = a^2 - 2a + 1 + 4a^2 - 4a + 1 \Rightarrow 4a = 8 \Rightarrow a = 2$$

۱۸- گزینه ۴ شیب خط $2x - ay = 1$ برابر $\frac{2}{a}$ است و شیب خط

$a^2x - 4y = 3$ برابر $\frac{a^2}{4}$ است. پس برای اینکه دو خط بر هم عمود باشند،

باید $-\frac{a}{2} = \frac{a^2}{4}$. در نتیجه

$$a^2 + 2a = 0 \Rightarrow a(a+2) = 0 \Rightarrow a = -2, \quad a = 0$$

۳۱- گزینه ۳ فاصله نقطه $(k, 2)$ از خط $x+2y-1=0$ برابر است با

$$\frac{|k+4-1|}{\sqrt{5}} = \frac{|k+3|}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} \Rightarrow |k+3|=10 \Rightarrow k=7, k=-13$$

۳۲- گزینه ۴ اگر خط را به صورت $12x+9y-1=0$ بنویسیم، فاصله

نقطه $(\frac{1}{2}, k)$ از آن برابر است با

$$\frac{|12 \times \frac{1}{2} + 9k - 1|}{\sqrt{12^2 + 9^2}} = 2 \Rightarrow |9k + 5| = 2\sqrt{12^2 + 9^2} = 30 \Rightarrow 9k = \pm 30 - 5$$

$$k = \frac{1}{9}(\pm 30 - 5) \Rightarrow k = \frac{25}{9}, k = -\frac{35}{9}$$

بنابراین مجموع مقادیرهای مورد نظر k برابر با $-\frac{10}{9}$ است.

۳۳- گزینه ۲ شیب خط $2y+x=1$ برابر $-\frac{1}{2}$ است. شیب خط

عمود بر این خط ۲ است. پس معادله خطی را که شیب آن ۲ باشد و از نقطه $(-1, 2)$ بگذرد می‌نویسیم:

$$y-2=2(x+1) \Rightarrow y=2x+4 \Rightarrow 2x-y+4=0$$

فاصله مبدأ مختصات از این خط مطلوب مسئله است که برابر است با

$$OH = \frac{|0+0+4|}{\sqrt{4+1}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

۳۴- گزینه ۱ معادله خطی را که از نقطه $A(-2, 1)$ با شیب m

می‌گذرد می‌نویسیم:

$$y-1=m(x+2) \Rightarrow mx-y+2m+1=0$$

فاصله $B(3, 1)$ از خط بالا برابر است با

$$\frac{|3m-1+2m+1|}{\sqrt{m^2+1}} = \frac{5|m|}{\sqrt{m^2+1}}$$

بنابراین

$$\frac{5|m|}{\sqrt{m^2+1}} = 4 \Rightarrow 5|m| = 4\sqrt{m^2+1} \Rightarrow 25m^2 = 16m^2 + 16$$

$$9m^2 = 16 \Rightarrow m^2 = \frac{16}{9} \Rightarrow m = \pm \frac{4}{3}$$

۳۵- گزینه ۳ ابتدا خطها را به صورت $2x-y+k=0$ و

$x-2y-1=0$ می‌نویسیم. حالا اگر فاصله A از دو خط برابر AH' و

$$AH' = \frac{|k+2-1|}{\sqrt{1+4}} \text{ و } AH = \frac{|2k+1+k|}{\sqrt{4+1}}$$

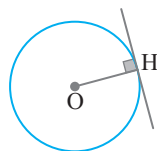
$$AH=2AH' \Rightarrow |2k+1| = 2|k+1| \Rightarrow \begin{cases} 2k+1=2k+2 \Rightarrow k=1 \\ 2k+1=-2k-2 \Rightarrow k=-\frac{3}{2} \end{cases}$$

۳۶- گزینه ۴ شعاع دایره برابر فاصله نقطه O از خط $6x+8y+1=0$

است.

$$R = \frac{|6-8+1|}{\sqrt{36+64}} = \frac{1}{10}$$

بنابراین مساحت دایره برابر است با $S = \pi R^2 = \frac{\pi}{100}$.



۲۶- گزینه ۱ وسط پاره‌خط میان نقطه‌های $(-3, 10)$ و $(-9, -2)$

نقطه $(\frac{-3-9}{2}, \frac{10-2}{2})$ یعنی $(-6, 4)$ است. چون نقطه $(m, m-4)$ روی عمودمنصف مورد نظر است، پس حاصل ضرب شیب خطی که از نقطه‌های

$(m, m-4)$ و $(-6, 4)$ می‌گذرد و خطی که از نقطه‌های $(-3, 10)$ و

$(-9, -2)$ می‌گذرد برابر -1 است:

$$\frac{m-4-4}{m+6} \times \frac{10+2}{-3+9} = -1 \Rightarrow \frac{m-8}{m+6} \times 2 = -1 \Rightarrow m = \frac{10}{3}$$

۲۷- گزینه ۳ وسط پاره‌خط میان نقطه‌های $(-5, 2)$ و $(-7, -4)$

نقطه $(\frac{-5-7}{2}, \frac{2-4}{2})$ یعنی $(-6, -1)$ است و شیب خط میان آن‌ها برابر

است با $\frac{2+4}{-5+7} = 3$. حاصل ضرب شیب‌های دو خط عمود برهم برابر -1

است. بنابراین شیب عمودمنصف مورد نظر $-\frac{1}{3}$ است و چون از نقطه

$(-6, -1)$ می‌گذرد معادله آن چنین است:

$$y+1 = -\frac{1}{3}(x+6) \Rightarrow x+3y+9=0$$

۲۸- گزینه ۳ راه‌حل اول وسط پاره‌خطی که نقطه‌های $(4, 4)$ و

$(2, -2)$ را به هم وصل می‌کند نقطه $(\frac{4+2}{2}, \frac{4-2}{2})$ یعنی $(3, 1)$ است. چون

این نقطه روی خط $x+ky-6=0$ است، پس مختصات آن در معادله این خط صدق می‌کنند:

$$3+k \times 1 - 6 = 0 \Rightarrow k = 3$$

راه‌حل دوم شیب خطی که از نقطه‌های $(4, 4)$ و $(2, -2)$ می‌گذرد برابر است

با $\frac{4+2}{4-2} = 3$ و چون این خط بر خط $x+yk-6=0$ عمود است، پس

حاصل ضرب شیب‌های آن‌ها برابر -1 است:

$$(-\frac{1}{k}) \times 3 = -1 \Rightarrow k = 3$$

۲۹- گزینه ۲ معادله خط را به صورت زیر در می‌آوریم:

$$4x+3y-36=0$$

فاصله مبدأ مختصات از این خط برابر است با $\frac{|0+0-36|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{36}{5}$.

۳۰- گزینه ۳ ابتدا معادله خطی را که از نقاط B و C می‌گذرد،

می‌نویسیم:

$$m_{BC} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{1-2}{-2-0} = \frac{1}{2}$$

$$y-y_B = m_{BC}(x-x_B) \Rightarrow y-1 = \frac{1}{2}(x+2)$$

پس معادله BC به صورت $x-2y+4=0$ است.

حالا فاصله نقطه A از BC را حساب می‌کنیم که همان طول AH است:

$$AH = \frac{|1-4+4|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

